Introdução às Instabilidades Hidrodinâmicas Escoamentos Bifásicos

Erick de Moraes Franklin

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Março 2015

Motivação

Diversos fenômenos físicos

- Industrial
    - Ondas interfaciais em dutos
    - Aglomeração/dispersão de poluentes
    - Transição para a turbulência em dutos
    - Instabilidades em jatos
    - Transição de padrões em dutos (esc.bifásicos)
- Ambiental
    - Início da convecção
    - Formação de rugas e de dunas
    - Ondas de gravidade

wikipedia (Creative Commons license)

Instabilidades Hidrodinâmicas

- Grande interesse acadêmico
  - Compreensão de mecanismos físicos
  - Compreensão das “Grandes Estruturas”
  - Elaboração de ferramentas de análise
  - Elaboração de métodos numéricos
  - Utilização de técnicas experimentais avançadas

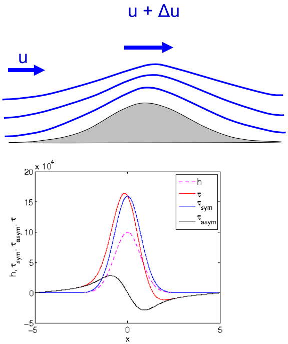
wikipedia (Creative Commons license)

Breve histórico

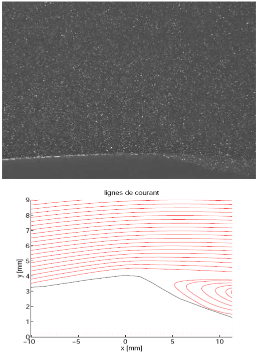
- Faraday (1831)
- Helmholtz (1868)
- Kelvin (1871)
- Rayleigh (1879)
- Reynolds (1883)
- Orr (1907)
- Sommerfeld (1908)
- Taylor (1923)
- Tollmien (1929)
- Schlichting (1933)
- Squire (1933)
- Landau (1944)
- Kapitza (1948)
- Gaster (1962)
- Chandrasekhar (1961)
- Yih (1963)

Evolução ao estado atual

- Ferramentas analíticas
  - Análises estabilidade
  - Métodos de Perturbação
  - Sistemas dinâmicos não lineares
- Ferramentas numéricas
  - DNS
  - Métodos de colocação espectral
- Ferramentas experimentais
  - Câmeras rápidas
  - PIV
  - PLIF
  - LDA



Perturbation Methods



PIV

Franklin, 2008

Est. no sentido de Lyapounov e Assintótica

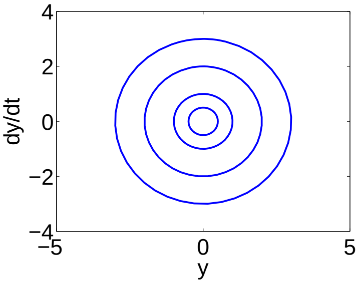
Definição

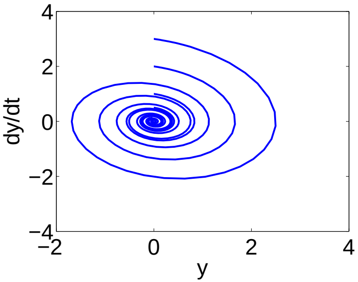
Um estado base $U_0(x,t)$ é dito estável no sentido de Lyapounov se, para $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, \delta(\epsilon) > 0 \mid ||u(x,0) - U_0(x,0)|| \leq \delta$, $||u(x,t) - U_0(x,t)|| \leq \epsilon$ *para todo* $t > 0$

Definição

Um estado base $U_0(x,t)$, estável no sentido de Lyapounov, é dito assintoticamente estável se $\exists \, \delta > 0 \mid$ *se* $||u(x,0) - U_0(x,0)|| \leq \delta$, *então* $\lim_{t\to\infty} ||u(x,t) - U_0(x,t)|| = 0$

Est. no sentido de Lyapounov e Assintótica: exemplos





- Lyapounov
  - Pêndulo não amortecido
- Assintótica
  - Pêndulo amortecido

Estado base e Perturbação

- Equações descrevendo um pb. Físico
  - Estado Base
  - Perturbação
- Estado Base ψ_0
  - Solução estacionária do problema
  - Satisfaz as equaçoes
- Perturbações $\tilde{\psi} \ll \psi_0$
  - Desvios em relação ao estado base

- Substitui-se $\psi_0 + \tilde{\psi}$ nas Eqs.
- Análise estab. linear (linear em $\tilde{\psi}$)
- Análise estab. não-linear
  - Fracamente não-linear
  - Termos ressoantes

Eq. Ginzburg-Landau: análise linear

- Equação modelo
- $\partial_t \psi + U \partial_x \psi = \mu \psi + \partial_{xx} \psi - |\psi|^2 \psi$
  - $\psi(x,t)$ = campo escalar complexo
  - μ e U = parâmetros
  - Eq. modelo para diversos sistemas físicos
- Estado Base $\psi_0 = 0$
  - Solução estacionária do problema
- Substituindo $\psi = \tilde{\psi} + 0$ e linearizando
  - $(\partial_t + U\partial_x - \mu - \partial_{xx})\tilde{\psi} = 0$
  - $D\tilde{\psi} = 0$
- Solução= ondas planas => $\tilde{\psi} = \hat{\psi} e^{i(kx - \omega t)}$
  - $D(k,\omega)\tilde{\psi} = 0$

Forçagem impulsional

- $D(k,\omega)\tilde{\psi} = S(x) = \delta(x)\delta(t)$
  - Solução: função de Green $G(x,t)$ associada ao operador D
  - $\tilde{\psi} = G(x,t)$
  - Pode dar origem a 3 comportamentos diferentes
- $\lim_{t\to\infty} G(x,t) = 0$ $\forall$ linha $x/t = cte$, então ψ_0 é linearmente estável
- $\lim_{t\to\infty} G(x,t) = 0$ em $x/t = 0$, então ψ_0 é convectivamente instável
- $\lim_{t\to\infty} G(x,t) = \infty$ em $x/t = 0$, então ψ_0 é absolutamente instável

Análise temporal vs. análise espacial

$\tilde{\psi} = \hat{\psi} e^{i(kx-\omega t)}$

- Temporal: $k \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{C}$
  - $\omega = \omega_r + i\omega_i$
  - em princípio, para instab. absoluta
  - cresc. exponencial como $e^{\omega_i t}$
    - $\omega_i > 0 \Rightarrow$ lin. instável
    - $\omega_i < 0 \Rightarrow$ estável
    - $\omega_i = 0 \Rightarrow$ estabilidade neutra

Análise temporal vs. análise espacial

$\tilde{\psi} = \hat{\psi} e^{i(kx - \omega t)}$

- Espacial: $k \in \mathbb{C}$ e $\omega \in \mathbb{R}$
  - $k = k_r + ik_i$
  - em princípio, para instab. convectiva
  - cresc. exponencial como $e^{-k_i x}$
    - $k_i < 0 \Rightarrow$ lin. instável
    - $k_i > 0 \Rightarrow$ estável
    - $k_i = 0 \Rightarrow$ estabilidade neutra
- As duas análises estão relacionadas pelo Teorema de Gaster

Teorema de Gaster

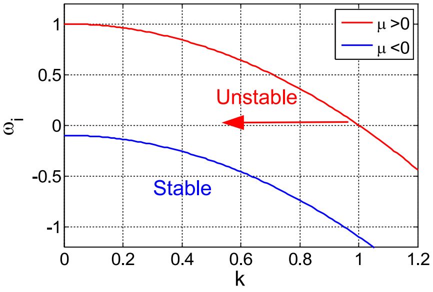
Lemma

Seja $c_g = \partial_{k_r}\omega$ *a velocidade de grupo de uma instabilidade inicial, onde* k_r *é o número de onda real, então as taxas de crescimento temporal e espacial se relacionam da seguinte forma:*

$$\omega_i^T = -c_g\, k_i^S$$

Example of temporal analysis

- Application to G.L. Equation
  - $(\partial_t + U\partial_x - \mu - \partial_{xx})\tilde{\psi} = 0$
- Temporal: $k \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{C}$
- $D(\omega, k) = -i\omega + iUk - \mu + k^2$
  - $\omega = \omega_r + i\omega_i$
- $\omega_i = \mu - k^2$
- $\omega_r = kU \Rightarrow c = \omega_r/k = U$
- Long wave instability



Critério de Estabilidade Linear

- Seja uma perturbação genérica

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{F_k}\int_{L_\omega} \hat{\psi}(x,t)e^{kx-\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}k$$

- Huerre and Rossi (1998) mostraram que a solução de $D\tilde{\psi} = S$ para um caminho de integração escolhido como $F_k \in \mathbb{R}$ é dominada pelos pólos de integração

$$\psi(x,t) = \frac{-i}{2\pi}\sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{S}(k,\omega_j)}{\partial_x D(k,\omega_j)} e^{kx-\omega_j t}\mathrm{d}k$$

Lemma

Uma C.N.S de estabilidade é que $\omega_{ji} < 0\,\forall j$ e em todos os números de onda k

Critério de Estabilidade Linear

- Seja uma perturbação genérica

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{F_k}\int_{L_\omega}\hat{\psi}(x,t)e^{kx-\omega t}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}k$$

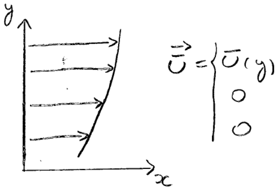
- Huerre and Rossi (1998) mostraram que a solução de $D\tilde{\psi} = S$ para um caminho de integração escolhido como $F_k \in \mathbb{R}$ é dominada pelos pólos de integração

$$\psi(x,t) = \frac{-i}{2\pi}\sum_j\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{S}(k,\omega_j)}{\partial_x D(k,\omega_j)}e^{kx-\omega_j t}\mathrm{d}k$$

- Estabilidade Temporal => C.N.S de estabilidade

Incompressible-inviscid shear flows

- Euler Eqs.
  - $\nabla \cdot \vec{V} = 0$
  - $\partial_t \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P$
- Basic state
  - $\vec{\overline{U}}(\vec{x}, t) = \overline{U}(y)\vec{e}_x$
  - $P(\vec{x}, t) = \overline{P}$
  - Flow parallel to the x direction
  - Invariant in x and z direction
- Perturbations
  - $\vec{u}(\vec{x}, t) = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$
  - $p(\vec{x}, t) = p$
- Total
  - $\vec{V}(\vec{x}, t) = \overline{U}(y) + u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$
  - $P(\vec{x}, t) = \overline{P} + p$



Basic state

Linear Perturbation Eqs.

- Inserindo $\vec{V}$ e P nas Eqs. Euler e linearizando
  - $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
  - $(\partial_t + \overline{U}\partial_x)\vec{u} + \overline{U}' v\vec{e}_x = -\nabla p$
- O problema é invariante por translações no tempo e nas direções x e z
  - $u = \hat{u}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
  - $v = \hat{v}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
  - $w = \hat{w}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
  - $p = \hat{p}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
- Inserindo nas Eqs. linearizadas:
  - $ik_x\hat{u} + \partial_y\hat{v} + ik_z\hat{w} = 0$
  - $i(k_x\overline{U} - \omega)\hat{u} + \overline{U}'\hat{v} = -ik_x\hat{p}$
  - $i(k_x\overline{U} - \omega)\hat{v} = -\partial_y\hat{p}$
  - $i(k_x\overline{U} - \omega)\hat{w} = -ik_z\hat{p}$

Linear Perturbation Eqs.

- + condições de contorno
  - $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, $\hat{p} \rightarrow$ 0 para $y \rightarrow \pm\infty$
  - ou,
  - $\hat{v} = 0$ para $y = y_1, y = y_2$
- Este sistema é do tipo
  - $L\phi = \omega M\phi$
- Onde $\phi = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})$ e L e M são operadores diferenciais lineares
- P/ dado vetor de onda:
  - $det(L - \omega M) = 0$, p/ sol. não trivial
  - $D(\vec{k}, \omega) = 0$, rel. dispersão

Transformação e teorema de Squire (1933)

- Seja a transformação
  - $\tilde{k}^2 = k_x^2 + k_z^2$
  - $\tilde{c} = c = \omega/k_x$
  - $\tilde{\omega} = \tilde{c}\tilde{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}/k_x$
  - $\tilde{k}\tilde{u} = k_x\hat{u} + k_z\hat{w}$
  - $\tilde{v} = \hat{v}$
  - $\tilde{p} = \hat{p}\tilde{k}/k_x$
- Inserindo no sistema anterior:
  - $i\tilde{k}\tilde{u} + \partial_y\tilde{v} = 0$
  - $i\tilde{k}(\overline{U} - \tilde{c})\tilde{u} + \overline{U}'\tilde{v} = -i\tilde{k}\tilde{p}$
  - $i\tilde{k}(\overline{U} - \tilde{c})\tilde{v} = -\partial_y\tilde{p}$
- + condições de contorno
  - $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p} \to$ 0 para $y \to \pm\infty$
  - ou,
  - $\tilde{v} = 0$ para $y = y_1, y = y_2$

Transformação e teorema de Squire (1933)

- Sistema 2D equivalente
  - $L\tilde{\phi} = \tilde{c}M\tilde{\phi}$
  - $det(L - \tilde{c}M) = 0$, p/ sol. não trivial
  - $D(\tilde{k}, \tilde{c}) = 0$, rel. dispersão

Lemma

A todo modo $(\vec{k}, \omega)$ tridimensional instável de taxa de crescimento temporal ω_i, pode ser associado um modo $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ bidimensional, mais instável ($\tilde{\omega}_i \geq \omega_i$), de taxa de crescimento temporal $\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{k_x^2 + k_y^2}/k_x$

- Para determinar est./inst. linear em escoam. paralelos, basta considerar perturbações 2D

Eq. de Rayleigh

- Dado Teorema de Squire, Eqs. 2D
- Para a função corrente $U = \partial_y \Psi$, $V = -\partial_x \Psi$
  - $[\partial_t + (\partial_y \Psi)\partial_x - (\partial_x \Psi)\partial_y]\nabla^2 \Psi \; = \; 0$
- onde
  - $\Psi \; = \; \overline{\Psi} + \psi$
- e linearizando
  - $(\partial_t + \overline{U}\partial_x)\nabla^2 \psi - \overline{U}'' \partial_x \psi \; = \; 0$
- cujas soluções são da forma
  - $\psi = \hat{\psi}(y) e^{ik(x-ct)}$
- obtém-se a Eq. de Rayleigh
  - $(\hat{\psi}'' - k^2 \hat{\psi}) - \hat{\psi}\overline{U}'' / (\overline{U} - c) \; = \; 0$

Eq. de Rayleigh

- Se $c = \overline{U}$, temos uma singularidade
- Cond. de contorno:
  - $\hat{\psi} \rightarrow 0$ para $y \rightarrow \pm\infty$
  - ou
  - $\hat{\psi} = 0$ para $y = y_1$ e $y = y_2$
- Dado o Teorema de Gaster, análise temporal ou espacial
- Se $\hat{\psi}$ é função própria associada ao valor próp. c, então $\hat{\psi}^*$ é função própria associada ao valor próp. c^*
- Se $c \in \mathbb{R}$, então perturbações se propagam sem se amplificar => Estável
- Se $c \in \mathbb{C}$, então c e c^* são complexos conjugados => Instável

Teorema de Rayleigh

Lemma

A existência de um pto. de inflexão no perfil de velocidades do escoamento de base é uma condição necessária (mas não suficiente) de instabilidade.

Demonstração.

Basta fazer $\int_{y_1}^{y_2}(Eq.\,Rayleigh)\cdot\hat{\psi}^*$ e separar a parte imaginária, que vale $c_i\int_{y_1}^{y_2}\frac{\overline{U}''}{|\overline{U}''-c|^2}|\hat{\psi}|^2dy\;=\;0$. Logo $\overline{U}''$ deve mudar de sinal (inflexão). $\square$

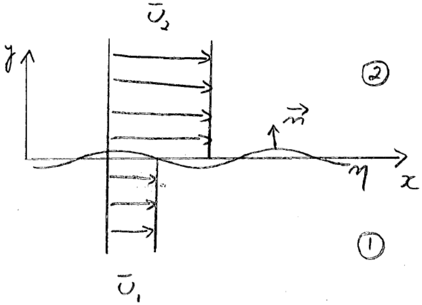
Teorema de Rayleigh

- Para escoamentos não-viscosos:

- OBS: os mecanismos viscosos foram desprezados...

Instabilidade de Kelvin-Helmholtz

- Sejam 2 correntes paralelas do mesmo fluido
  - $\overline{U}$ difrerentes
  - $\overline{U}$ uniformes
  - mesmo ρ
  - sem tensão superficial
  - KH "clássica"
- Eq. de Rayleigh com $\overline{U}'' = 0$
- $\hat{\psi}_j'' - k^2\hat{\psi}_j$
  - $\hat{\psi}_j = A_j e^{-ky} + B_j e^{ky}$



$y = H + \eta(x,t)$

KH

- Cond. no infinito => $\hat{\psi}$ limitada
  - $A_1 = 0$ e $B_2 = 0$
    - $\hat{\psi}_1 = B_1 e^{ky}$
    - $\hat{\psi}_2 = A_2 e^{-ky}$
- Cond. cinemática na interface:
  - $\vec{V}_j \cdot \vec{n} = \vec{W} \cdot \vec{n}$ para $y = \eta$
    - $\vec{n} = \frac{\nabla H}{|\nabla H|} = \frac{(-\partial_x \eta, 1)}{\sqrt{1+\partial_x \eta^2}} \approx (-\partial_x \eta, 1)$
    - $dH = 0 \Rightarrow \vec{W} \cdot \vec{n} = \frac{-\partial_t H}{|\nabla H|} = \frac{\partial_t \eta}{\sqrt{1+\partial_x \eta^2}} \approx \partial_t \eta$
    - $\eta = \hat{\eta} e^{ik(x-ct)}$
  - $\hat{\psi}_1(0)/(\overline{U}_1(0) - c)^{-1} = \hat{\psi}_2(0)/(\overline{U}_2(0) - c)^{-1} = -\hat{\eta}$
  - logo, $B_1(\overline{U}_1 - c)^{-1} = A_2(\overline{U}_2 - c)^{-1}$

KH

- Cond. dinâmica na interface:
  - $P_1(\eta) = P_2(\eta)$ => $p_1(0) = p_2(0)$
  - e, combinando com a comp. x da Eq. de Euler,
    - $\partial_t U + U\partial_x U + V\partial_y U \; = \; -\partial_x P$
  - $(\overline{U}_1 - c)\hat{\psi}_1'(0) - \overline{U}_1'\hat{\psi}_1(0) = (\overline{U}_1 - c)\hat{\psi}_2'(0) - \overline{U}_2'\hat{\psi}_2(0)$
  - logo, $(\overline{U}_1 - c)kB_1 = -(\overline{U}_2 - c)kA_2$

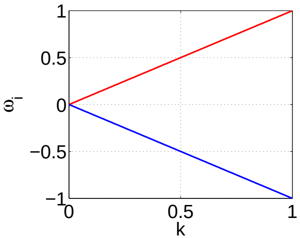
KH

- A solução do sistema
  - $\hat{\psi}_1 = B_1 e^{ky}$
  - $\hat{\psi}_2 = A_2 e^{-ky}$
  - $B_1(\overline{U}_1 - c)^{-1} = A_2(\overline{U}_2(0) - c)^{-1}$
  - $(\overline{U}_1 - c)kB_1 = -(\overline{U}_2 - c)kA_2$

  é
- $c = \omega/k = U_m \pm i\Delta U$
  - $Um = (\overline{U}_1 + \overline{U}_2)/2$
  - $\Delta U = (\overline{U}_1 - \overline{U}_2)/2$
- 2 modos correspondendo a 2 valores próprios conjugados
- Para análise temporal ($c = c_r + ic_i$):
  - Celeridade: $c_r = U_m$
  - Taxa de crescimento $\omega_i = \pm k\Delta U$

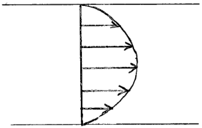
KH: conclusões

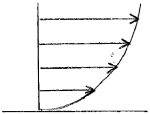
- O escoamento é instável para qualquer ΔU
  - Qualquer perturbação, qualquer k
- Taxa de crescimento aumenta com k
  - Qto. menor o comp. de onda, mais instável
- Ondas se propagam à mesma velocidade U_m
- Estas conclusões não-viscosas são pouco Físicas
  - Ignoramos a difusão viscosa
    - Estabiliza os pequenos comp. de onda
  - Na presença de interfaces, há ainda a capilaridade
- Validade da análise não viscosa (análise dimensional):
  - $k \ll \Delta U/\nu$



Viscous vs. inviscid

- Inst. não viscosas: presença de pto. de inflexão. Validade:
  - Escoam. a Re elevados e longe de paredes
  - Ex: jato livre, esteiras, camada de mistura
- Longe de paredes, a viscosidade teria apenas papel difusivo
  - Apenas atenua a taxa de crescimento
- A proximidade de paredes modifica bastante as coisas
  - Viscosidade é fundamental

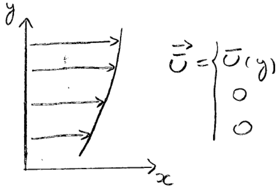




- Estáveis segundo Teorema de Rayleigh
- Diferente da obs. experimental

Incompressible viscous shear flow

- NS equations
  - $\nabla \cdot \vec{V} = 0$
  - $\partial_t \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V}$
- Basic state
  - $\vec{\overline{U}}(\vec{x}, t) = \overline{U}(y) \vec{e}_x$
  - $P(\vec{x}, t) = \overline{P}$
  - Flow parallel to the x direction
  - Invariant in x and z directions
- Perturbations
  - $\vec{u}(\vec{x}, t) = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$
  - $p(\vec{x}, t) = p$
- Total
  - $\vec{V}(\vec{x}, t) = \overline{U}(y) + u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$
  - $P(\vec{x}, t) = \overline{P} + p$



Estado base

Linear Perturbation Eqs.

- Inserindo $\vec{V}$ e P nas Eqs. Euler e linearizando = Eqs. Não Viscosas + $\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}$
  - $\nabla \cdot \vec{u} = 0$
  - $(\partial_t + \overline{U}\partial_x)\vec{u} + \overline{U}' v\vec{e}_x = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\vec{u}$
- O problema é invariante por translações no tempo e nas direções x e z
  - $u = \hat{u}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
  - $v = \hat{v}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
  - $w = \hat{w}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
  - $p = \hat{p}(y)e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} + c.c.$
- Inserindo nas Eqs. linearizadas = Eqs. Não Viscosas + $(1/Re)(\partial_{yy} - k_x^2 + k_z^2)$
  - $ik_x\hat{u} + \partial_y\hat{v} + ik_z\hat{w} = 0$
  - $i(k_x\overline{U} - \omega)\hat{u} + \overline{U}'\hat{v} = -ik_x\hat{p} + (1/Re)(\partial_{yy} - k_x^2 + k_z^2)\hat{u}$
  - $i(k_x\overline{U} - \omega)\hat{v} = -\partial_y\hat{p} + (1/Re)(\partial_{yy} - k_x^2 + k_z^2)\hat{v}$
  - $i(k_x\overline{U} - \omega)\hat{w} = -ik_z\hat{p} + (1/Re)(\partial_{yy} - k_x^2 + k_z^2)\hat{w}$

Linear Perturbation Eqs.

- + condições de contorno
  - $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p} \rightarrow 0$ para $y \rightarrow \pm\infty$
  - ou,
  - $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$, para $y = y_1, y = y_2$
- Este é um problema de autovalores que só admite solução não trivial se:
  - $D(\vec{k}, \omega, Re) = 0$
- Transformação de Squire
  - Transformação pb. não-viscoso

    +
  - $\tilde{Re} = Re k_x / \tilde{k}$

Transformação e teorema de Squire (1933)

- Inserindo a transf. no sistema anterior:
  - $i\tilde{k}\tilde{u} + \partial_y \tilde{v} = 0$
  - $i\tilde{k}(\overline{U} - \tilde{c})\tilde{u} + \overline{U}'\tilde{v} = -i\tilde{k}\tilde{p} + (1/\tilde{Re})(\partial_{yy} - \tilde{k}^2)\tilde{u}$
  - $i\tilde{k}(\overline{U} - \tilde{c})\tilde{v} = -\partial_y \tilde{p} + (1/\tilde{Re})(\partial_{yy} - \tilde{k}^2)\tilde{v}$
- + condições de contorno
  - $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{p} \rightarrow 0$ para $y \rightarrow \pm\infty$
  - ou,
  - $\tilde{u}$, $\tilde{v} = 0$ para $y = y_1, y = y_2$
- Sistema 2D equivalente
  - $D(\tilde{k}, \tilde{c}, \tilde{Re}) = 0$

Teorema de Squire (1933)

- Ou seja,
  - $D(\sqrt{k_x^2+k_z^2}, \omega\sqrt{k_x^2+k_y^2}/k_x, Re\, k_x/\sqrt{k_x^2+k_z^2}) = 0$
  - $\tilde{\omega}_i \geq \omega_i$ e $\tilde{Re} \leq Re$

Lemma

A todo modo oblíquo$(\vec{k}, \omega)$ tridimensional instável de taxa de crescimento temporal ω_i para o número de Reynolds Re, pode ser associado um modo $(\tilde{k}, \tilde{\omega})$ bidimensional mais instável, de taxa de crescimento temporal $\tilde{\omega}_i = \omega_i\sqrt{k_x^2+k_y^2}/k_x \geq \omega_i$ para o número de Reynolds $Re\, k_x/\sqrt{k_x^2+k_z^2} \leq Re$

- Para determinar est./inst. linear em escoam. paralelos viscosos, basta considerar perturbações 2D

Eq. de Orr-Sommerfeld

- Dado Teorema de Squire, Eqs. 2D
- Para a função corrente $U = \partial_y \Psi$, $V = -\partial_x \Psi$
- $\Psi = \overline{\Psi} + \psi$
- e linearizando
- Obtem-se eq. não-viscosa + $(1/Re)(\partial_{xx} + \partial_{yy})^2 \psi$
  - $(\partial_t + \overline{U}\partial_x)\nabla^2\psi - \overline{U}''\partial_x\psi = (1/Re)(\partial_{xx} + \partial_{yy})^2\psi$
- cujas soluções são da forma
  - $\psi = \hat{\psi}(y)e^{ik(x-ct)}$
- => Eq. de Orr-Sommerfeld = Rayleigh + $(1/ikRe)(\partial_{yy} - k^2)^2\hat{\psi}$
  - $(\overline{U} - c)(\partial_{yy} - k^2)\hat{\psi} - \overline{U}''\hat{\psi} = (1/ikRe)(\partial_{yy} - k^2)^2\hat{\psi}$

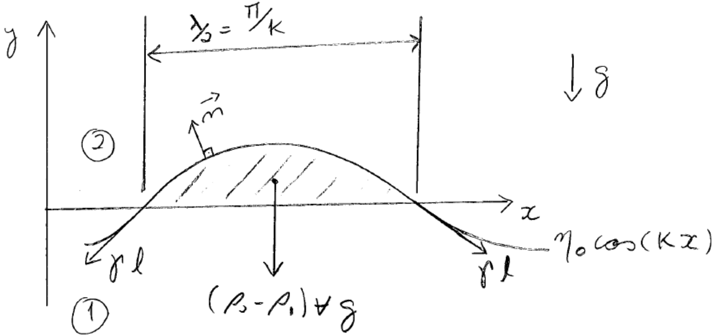
Eq. de Orr-Sommerfeld

- $(\overline{U} - c)(\partial_{yy} - k^2)\hat{\psi} - \overline{U}''\hat{\psi} = (1/ikRe)(\partial_{yy} - k^2)^2\hat{\psi}$
- $L_A\hat{\psi} = cL_B\hat{\psi}$
- + Cond. de contorno:
  - $\partial_y\hat{\psi} \to 0$ e $\hat{\psi} \to 0$ para $y \to \pm\infty$
  - ou
  - $\partial_y\hat{\psi} = 0$ e $\hat{\psi} = 0$ para $y = y_1$ e $y = y_2$
- Pb. autovalores
- EDO 4^a ordem com coef. não constantes
- Não há solução geral exata
  - Métodos de perturbação
  - Soluções numéricas

Instabilidade de Rayleigh-Taylor

- Fluidos não miscíveis sobrepostos em campo gravitacional
  - Separados por interface horizontal
  - Sem efeitos de parede
  - Sem efeitos viscosos significativos
- Rayleigh (1879, 1883)
- Fisicamente, competição entre:
  - Gravidade
  - Tensão superficial

Dimensional analysis



- $W/b = (\rho_2 - \rho_1)g\forall/b \sim (\rho_2 - \rho_1)g\eta_0/k$
- $F_{tens.sup}/b \approx 2\gamma\theta \sim \gamma\eta_0 k$

Análise dimensional

- Caso 1: $\rho_1 > \rho_2$
  - $F_y/b \;=\; -(\rho_1 - \rho_2)g\eta_0/k - \gamma\eta_0 k$
  - atua para baixo (força estabilizante)
  - Oscilador que desloca $\forall/b \sim k^{-2}$ e $m/b \sim (\rho_1 + \rho_2)k^{-2}$
  - para este oscilador:
    - $\kappa = |F|/\eta_0 \;\sim\; (\rho_1 - \rho_2)g/k + \gamma k$
    - $\omega^2 = \kappa/m \;\sim\; [(\rho_1 - \rho_2)gk + \gamma k^3](\rho_1 + \rho_2)^{-1}$
- Caso 2: $\rho_1 < \rho_2$
  - A ação desestabilizante é mais forte se:
  - $(\rho_2 - \rho_1)g\eta_0/k > \gamma\eta_0 k$
    logo
  - $k^2 < (\rho_2 - \rho_1)g/\gamma$
  - $\lambda \;>\; l_c \;=\; \sqrt{\gamma/(\rho_2 - \rho_1)g}$
  - Interface instável para perturbações com $\lambda > l_c$ = comprimento capilar

Análise dimensional

- Comprimento característico:
  - $l_c = \sqrt{\gamma / |\rho_2 - \rho_1| g}$
- Tempo característico:
  - $\tau_c = \sqrt{l_c / g} = (\gamma / |\rho_2 - \rho_1| g^3)^{1/4}$
- Efeitos de parede
  - Desprezíveis se $D \gg l_c$
- Efeitos viscosos
  - Desprezíveis se QDM se difundir em distância $\ll l_c$
    - $\sqrt{\nu \tau_c} \ll l_c$
      ou seja,
    - $Re_c = l_c^2 / (\nu \tau_c) \gg 1$
    - P/ interface ar-H_2O, $Re_c \approx 15 \gg 1$

Análise de estabilidade

- Solução de base
  - $\overline{U}_1 = \overline{V}_1 = 0$
  - $\overline{U}_2 = \overline{V}_2 = 0$
  - $\overline{P}_1 = P_0 - \rho_1 g y$
  - $\overline{P}_2 = P_0 - \rho_2 g y$
  - $\overline{\eta} = 0$
- Escoamento perturbado
  - $U_j = \overline{U}_j + u_j$
  - $V_j = \overline{V}_j + v_j$
  - $P_j = \overline{P}_j + p_j$
  - $\eta = 0 + \eta$
- Hipótese:
  - Perturbações irrotacionais
    - $\vec{u}_j = \nabla \phi_j$
  - Justificativa
    - P/ perturbação, $\partial_t \omega_j = \nu \Delta \omega$
    - $Re_c \gg 1 \;\Rightarrow\; \partial_t \omega_j = 0$

Eqs. Conservação

- Massa
  - $\partial_x U_j + \partial_y V_j = 0$ logo, p/ a perturbação
  - $\partial_{xx}\phi_j + \partial_{yy}\phi_j = 0$
- QDM
  - $\rho_j \partial_t \phi_j + \frac{1}{2}\rho_j (\nabla \phi_j)^2 + P_j + \rho_j g y = cte$
    linearizando e considerando o estado base na cte
  - $\rho_j \partial_t \phi_j + p_j = 0$
- Condições de Contorno
  - Decréscimo em $y \to \pm\infty$
    - $\phi_1, p_1 \to 0$ para $y \to -\infty$
    - $\phi_2, p_2 \to 0$ para $y \to +\infty$
  - Condição cinemática na interface
    - $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{W} \cdot \vec{n}$
      logo, desenvolvendo (e linearizando):
    - $v_1(y=0) = v_2(y=0) = \partial_t \eta$

Eqs. Conservação

- Condição dinâmica na interface
  - $P_1(\eta) - P_2(\eta) = \gamma/R$
    onde
    - $P_j = P_0 - \rho_j g y + p_j$
    - $1/R = -\nabla \cdot \vec{n}$ é a curvatura da interface
  - $p_2(0) - p_1(0) = \gamma \partial_{xx}\eta + (\rho_2 - \rho_1) g \eta$
- Inserindo os modos normais
  - $\phi(x, y, t) = \hat{\phi}(y) e^{i(kx - \omega t)}$
  - $\eta(x, y, t) = \hat{\eta}(y) e^{i(kx - \omega t)}$
  - $p(x, y, t) = \hat{p}(y) e^{i(kx - \omega t)}$

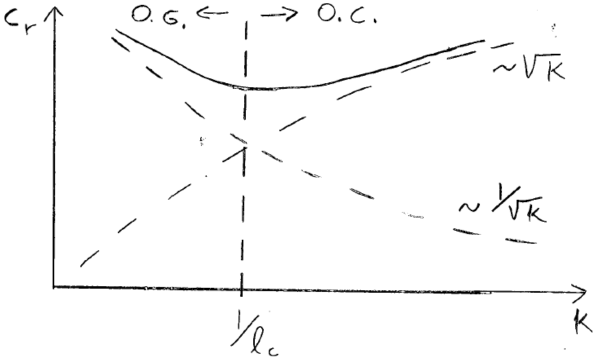
Relação de dispersão

- Eqs. Conservação linearizadas
  - $(\partial_{yy} - k^2)\hat{\phi}_j = 0$
  - $-i\omega\rho_j\hat{\phi}_j + \hat{p}_j = 0$
- Condições de contorno linearizadas
  - $\hat{\phi}_1 \to 0, \; y \to -\infty$
  - $\hat{\phi}_2 \to 0, \; y \to +\infty$
  - $\partial_y\hat{\phi}_1 = -i\omega\hat{\eta}, \; y = 0$
  - $\partial_y\hat{\phi}_2 = -i\omega\hat{\eta}, \; y = 0$
  - $(\hat{p}_2 - \rho_2 g\hat{\eta}) - (\hat{p}_1 - \rho_1 g\hat{\eta}) = -k^2\gamma\hat{\eta}, \; y = 0$
- Relação de dispersão
  - $\omega^2 = k[\gamma k^2 - (\rho_2 - \rho_1)g](\rho_2 + \rho_1)^{-1}$

Análise

- Análise temporal
  - $k \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{C}$
- caso 1: $\rho_1 > \rho_2$
  - $\omega^2 > 0 \Rightarrow \omega \in \mathbb{R}$
  - $\omega_i = 0$: estabilidade neutra
  - $\omega_r \neq 0$: oscilações
  - $\omega = \sqrt{[(\rho_1 - \rho_2)gk + \gamma k^3](\rho_1 + \rho_2)^{-1}}$
  - $c_r = \omega_r / k = \sqrt{[(\rho_1 - \rho_2)gk^{-1} + \gamma k](\rho_1 + \rho_2)^{-1}}$
    ou seja,
  - $c_r = \sqrt{[k^2 + 1/l_c^2]\gamma[(\rho_1 + \rho_2)k]^{-1}}$
    logo
  - $k \to 0 \Rightarrow c \sim 1/\sqrt{k}$
  - $k \to \infty \Rightarrow c \sim \sqrt{k}$

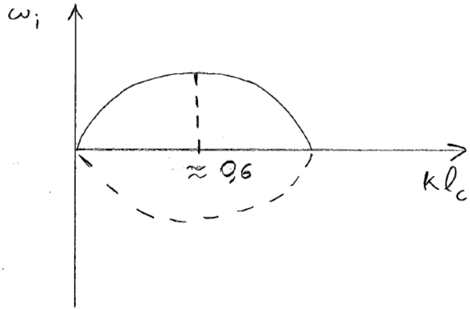
Dimensional analysis



Análise

- caso 2: $\rho_1 < \rho_2$
  - $\omega^2 = [k^2 - 1/l_c^2]k\gamma(\rho_2 + \rho_1)^{-1}$
  - 2.1) $kl_c > 1$: ondas curtas
    - $\omega^2 > 0 \Rightarrow \omega \in \mathbb{R}$
    - $\omega_i = 0$: estabilidade neutra
  - 2.2) $kl_c < 1$: ondas longas
    - $\omega^2 < 0 \Rightarrow \omega \in \mathbb{C}$
    - $\omega_i = \pm\sqrt{-[\gamma k^3 - (\rho_2 - \rho_1)gk](\rho_2 + \rho_1)^{-1}}$
      logo
    - 1 modo estável $\omega_i < 0$
    - 1 modo instável $\omega_i > 0$

Dimensional analysis



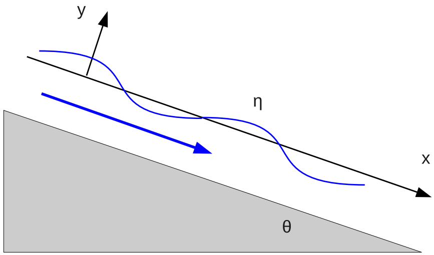
- água-ar $\Rightarrow l_c \sim 1\,mm$
    - $\lambda_{max} \sim 10\,mm$

Instabilidade de Rayleigh-Plateau

- Esc. gravitacional de filete de líquido
  - Rodeado por gás
  - Sem efeitos viscosos significativos
- Plateau (1857)
- Rayleigh (1879)
- Fisicamente, competição entre:
  - Inércia
  - Tensão superficial

Filme líquido em plano inclinado

- Esc. gravitacional
- Kapitza (1948, 1949), Benjamim (1957), Yih (1963), Benney (1966), Liu et al. (1993)
- Fisicamente, competição entre:
  - Inércia
  - Gravidade
  - Tensão superficial



Problema 2D

- Eqs. do problema
  - $\partial_x U + \partial_y V = 0$
  - $\rho \left[U \partial_x U + V \partial_y U \right] = -\partial_x P + \rho g \sin\theta + \mu \left[\partial_{xx} U + \partial_{yy} U \right]$
  - $\rho \left[U \partial_x V + V \partial_y V \right] = -\partial_y P + \rho g \cos\theta + \mu \left[\partial_{xx} V + \partial_{yy} V \right]$
- Estado base
  - $\overline{\eta} = 0$
  - $\overline{V}(y) = 0$
  - $\overline{U}(y) = U_0 \left(1 - y^2/h^2 \right)$
  - $\overline{P}(y) - P_0 = -\rho g y \cos\theta$

    onde
  - $U_0 = \frac{\rho g h^2 \sin\theta}{2\mu}$
- Perturbações
  - $U = \overline{U} + u = \overline{U} + \partial_y \psi$
  - $V = \overline{V} + v = 0 - \partial_x \psi$
  - $\Xi = \overline{\eta} + \eta = 0 + \eta$

Problema 2D

- Modos normais
  - $\psi(x,y,t) = \hat{\psi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}$
  - $\eta(x,y,t) = \hat{\eta}(y)e^{i\alpha(x-ct)}$

    onde
  - $\alpha = kh$
- Substituindo nas Eqs. do Pb.
  - $\left(D^2 - \alpha^2\right)^2 \hat{\psi} = i\alpha Re\left[\left(\bar{U} - c\right)\left(D^2 - \alpha^2\right) - D^2\bar{U}\right]\hat{\psi}$

    onde
  - $\partial_{yy} = D^2$
  - c normalizado por U_0
- Que é a Eq. de Orr-Sommerfeld
  - Obs: esc. base é paralelo => Teorema de Squire

Problema 2D

- Cond. contorno não deslizamento ($y = -h$)
  - $U = 0, V = 0$

    logo
  - $D\hat{\psi}(-1) = 0$
  - $\hat{\psi}(-1) = 0$
- Condição cinemática na interface ($y = \eta$)
  - $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{W} \cdot \vec{n}$

    logo, desenvolvendo:
  - $\hat{\psi}(0) - (c-1)\hat{\eta}(0) = 0$
- Condição dinâmica na interface ($y = \eta$)
  - continuidade da tensão tangencial na interface
  - salto da tensão normal na interface

Problema 2D

- Condição dinâmica na interface (cont.)
  - $\vec{t} \cdot (\Gamma \cdot \vec{n}) = 0$
  - $\vec{n} \cdot (\Gamma \cdot \vec{n}) - \vec{n} \cdot (-P_0 \vec{n}) = \gamma / R$

  onde
  - $\vec{t}$ é o vetor tangente, $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$
  - Γ é o tensor de tensões
  - $1/R = -\nabla \cdot \vec{n}$ é a curvatura da interface
  - Assim, para um fluido newtoniano:
  - $\frac{-2\mu\partial_x\eta}{(\partial_x\eta)^2+1}(\partial_x U - \partial_y V) + \mu\frac{1-(\partial_x\eta)^2}{1+(\partial_x\eta)^2}(\partial_y U + \partial_x V) = 0$
  - $-P + \frac{2\mu}{(\partial_x\eta)^2+1}((\partial_x\eta)^2\partial_x U + \partial_y V - \partial_x\eta(\partial_y U + \partial_x V)) + P_0 = \frac{\gamma\partial_{xx}\eta}{((\partial_x\eta)^2+1)^{3/2}}$

Problema 2D

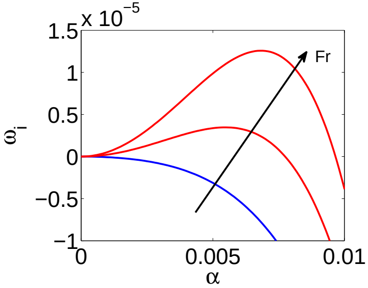
- Condição dinâmica na interface (cont.)
  - $D^2\hat{\psi}(0) + \alpha^2\hat{\psi}(0) + \hat{\eta}D^2\bar{U}(0) \;=\; 0$
  - $-D^3\hat{\psi}(0) + \left(3\alpha^2 - i\alpha Re(c-1)\right) D\hat{\psi}(0) + i\alpha Re\left(\frac{1}{Fr} + \frac{\alpha^2}{We}\right)\hat{\eta} = 0$
- EDO 4^a ordem com coef. não constantes + cond. cont.
- Não há solução geral exata
  - Métodos de perturbação
  - Soluções numéricas

Solução assintótica

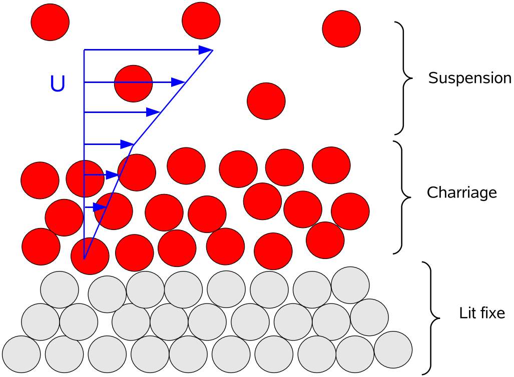
- Fazendo a expansão para ondas longas $\alpha \ll 1$ (Benney,1966)
  - $\hat{\psi}(y) = \hat{\psi}^{(0)}(y) + \alpha\hat{\psi}^{(1)}(y) + O(\alpha^2)$
  - $c = c^{(0)} + \alpha c^{(1)} + O(\alpha^2)$
- cuja solução para c truncada em $O(\epsilon)$
  - $c^{(0)} = 2$
  - $c^{(1)} = iRe\frac{8}{15}\left(1 - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{Fr} + \frac{\alpha^2}{We}\right)\right)$
- Taxa de crescimento é $\omega_i = \alpha c_i = \alpha^2 c^{(1)}$
- Condição de estabilidade marginal, $\omega_i = 0$ nos fornece:
  - $Fr_c = \frac{5}{8}$
  - $Re_c = \frac{5}{4\tan\theta}$
  - Próximos dos valores encontrados experimentalmente

Solução assintótica

- Taxa de crescimento é $\omega_i = \alpha c_i = \alpha^2 c^{(1)}$
- $Fr_c = \frac{5}{8}$
  - $\omega_i = (Re/3)\left[(1/Fr_c) - 1/Fr\right]\alpha^2 - (1/3)(Re/We)\alpha^4$



Modos de transporte



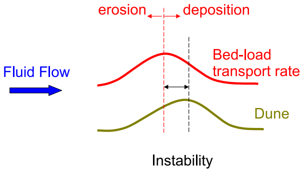
$$Re_* = \frac{d\,u_*}{\nu}$$

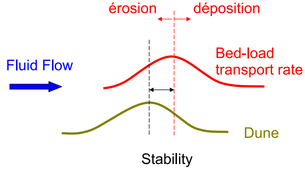
$$\theta = \frac{\tau}{(\rho_p - \rho)gd}$$

- Bed-load : $0,01 \lesssim \theta \lesssim 1$
- Suspensão : $\theta \gtrsim 1$

Instabilidades de um leito granular

- Perturbação do escoamento
  - defasagem à montante
  - Mecanismo instável
- Efeitos de relaxamento
  - defasagem à jusante
  - Mecanismo estável
- Efeitos gravitacionais
  - defasagem à jusante
  - Mecanismo estável





Linear stability analysis

- Fluid flow perturbation
  - $\hat{\tau}_x = A\left(\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial_x h}{x-\xi} d\xi + B\partial_x h\right)$
- Bed-load flow rate
  - $q_{sat} \propto \tau^{3/2}$
- Relaxation effects
  - $\partial_x q = \frac{q_{sat}-q}{L_{sat}}$
- Gravity effects
  - $\hat{\tau}_{eff,x} = A\left(\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial_x h}{x-\xi} d\xi + B_e\partial_x h\right)$
- Mass conservation
  - $\partial_t h + \partial_x q = 0$

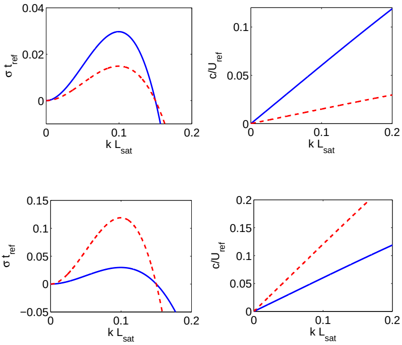
- Normal modes
  - $h(x,t) = He^{\sigma t - i\omega t + ikx}$
  - $\frac{q(x,t)}{Q_{sat}} = 1 + Qe^{\sigma t - i\omega t + ikx}$

Linear stability analysis

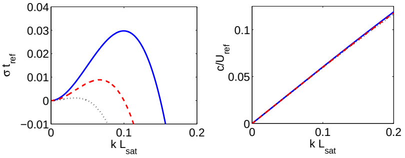
- $\sigma = \frac{3Q_{sat}k^2(B - A|k|L_{sat})}{2[1+(kL_{sat})^2]}$
- $\omega = \frac{3Q_{sat}k|k|(A + B|k|L_{sat})}{2[1+(kL_{sat})^2]}$
- $c = \frac{3Q_{sat}|k|(A + B|k|L_{sat})}{2[1+(kL_{sat})^2]}$

- Most Unstable mode
  - $\frac{\partial\sigma}{\partial k} = 0$
- $k_{max} \approx \frac{2B_e}{3A}\frac{1}{L_{sat}}$
- $L_{max} \approx \frac{3A}{2B_e}L_{sat}$
- $\sigma_{max} \approx \frac{2}{9}\frac{B^3}{A^2}(A-2)Q_{sat}\frac{1}{(L_{sat})^2}$
- $c_{max} \approx \frac{B}{A}Q_{sat}\frac{1}{L_{sat}}$

Long wave instability



Franklin (2010)

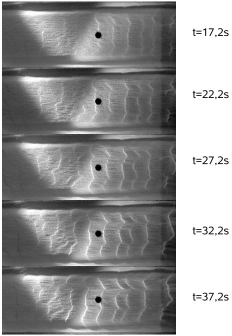


Franklin (2010)

- Long-wave instability
- Most unstable mode
- L_{max} varies with fluid flow conditions

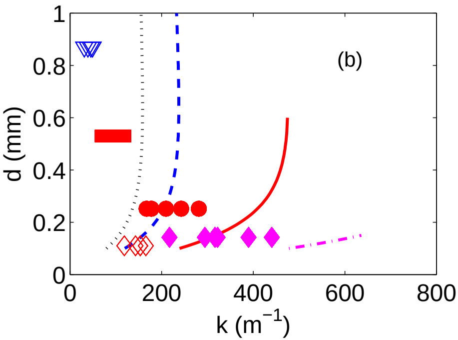
Experiments

- Channel $120mm \times 60mm$ e $6m$ comp.
- Acrylic
- Water + beads
  - glass beads $d = 0.143mm$, $d = 0.252mm$, $d = 0.530mm$
  - zirconium beads $d = 0.180mm$
- Camera



Franklin (2008)

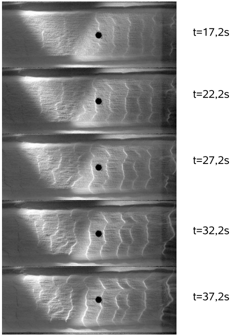
Experiments



Franklin (2015)

Evolução das instabilidades

- Evolução após fase inicial
  - Amplitude passa a ser considerável
  - Evolução para formas 3D
  - Efeitos não-lineares presentes
- Análise
  - Inst. inicial: $o(\epsilon)$ desprezado
  - Após fase inicial: $o(\epsilon)$ não pode ser desprezado
  - análise não-linear
- Observações experimentais
  - Às vezes, λ não-linear é previsto pela análise linear
  - Por que?



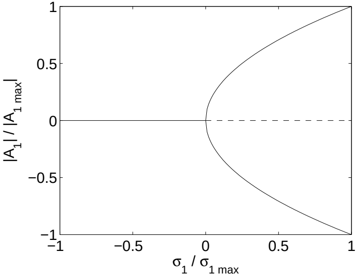
Franklin (2008)

Análise fracamente não-linear

- Landau (1944) e Landau and Lifchitz (1959)
  - $\frac{dA}{dt} = SA - \kappa_L |A|^2 A + O(A^4)$
  - $h(x,t) = \frac{1}{2}\left(A(t)f(x) + A^*(t)f^*(x)\right)$
  - $A \sim e^{St}$; $S = \sigma + i\omega$
- Aplicação ao leito granular
- $\partial_t h + B_1 h^2 + B_2 (\partial_x h)^2 + B_3 h \partial_x h + B_4 h + B_5 \partial_x h + B_6 = 0$
  - $h(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{inkx}$
  - $\frac{dA_n}{dt} = S_n A_n + iB_3 \sum_{p=-\infty}^{\infty} p A_{p+n} A_p^*$

Análise fracamente não-linear

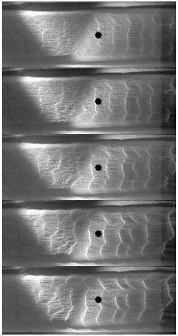
- $\frac{dA_1}{dt} = S_1 A_1 - B_3 i A_2 A_1^* + O(A^4)$
- $\frac{dA_2}{dt} = S_2 A_2 - B_3 i A_1^2 + O(A^4)$
- no início: $\frac{dA_n}{dt} \sim \sigma_1 A_n << |\sigma_n| A_n$
- Encontra-se um fundamental
  - $\frac{dA_1}{dt} = S_1 A_1 - \kappa_L |A_1|^2 A_1$
  - $\kappa_L = -\frac{B_3^2}{\sigma_2} > 0$
- Bifurcação supercrítica
  - saturação do fundamental pelas não-linearidades
  - amplitude satura a dado λ



Franklin (2011)

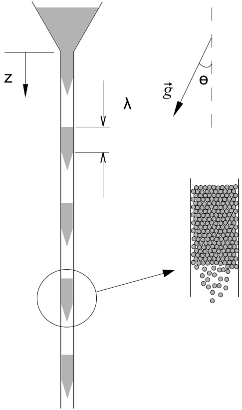
Evolução das instabilidades

- Análise fracamente não-linear aplicada ao leito
  - Indica a presença de um modo fundamental
  - O fundamental tem origem na fase linear
  - Interação não-linear dá origem a uma bifurcação supercrítica
    - saturação da amplitude
- Explicação plausível para a saturação observada experimentalmente

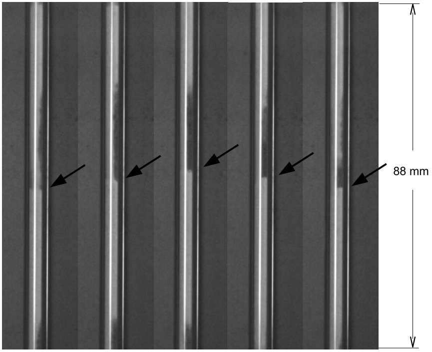


Franklin (2008)

Escoamento gravitacional



Franklin and Alvarez Zambrano (2015)



Franklin and Alvarez Zambrano (2015)

Análise linear

- Eq. plugs granulares
  - $\rho_s c \left(\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial z} \right) = \rho_s c g - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{2}{R} \sigma_{zr}$
- Eq. massa + Darcy + rel. isentrópicas
  - $\frac{\partial P}{\partial t} + v_s \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\gamma P}{(1-c)} \frac{\partial v_s}{\partial z} - B \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0$
- Perturbações
  - $P = P_0 + \tilde{P}$
  - $v_s = v_0 + \tilde{v}$
- Eqs. perturbações
  - $\rho_s c \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} - B_3 v_0 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - B_5 v_0 \tilde{v}$
  - $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + \frac{\gamma P_0}{(1-c)} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - B_1 \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} = 0$

Análise linear

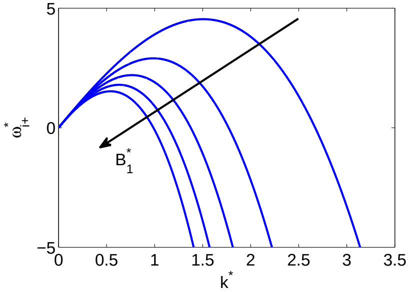
- Modos normais
  - $\tilde{P} = \hat{P}e^{i(kz-\omega t)}$
  - $\tilde{v} = \hat{v}e^{i(kz-\omega t)}$
- inserindo nas Eqs.:

$$\begin{bmatrix} -\omega + v_0 ik + B_1 k^2 & \frac{\gamma P}{(1-c)} ik \\ ik & \rho_s c \left(-i\omega + v_0 ik\right) + B_3 v_0 ik + B_5 v_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P} \\ \hat{v} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escoamento gravitacional

- $0,5 < k^* < 1,5$
- $10D > \lambda > 4D$
- Acordo com dados experimentais



Referências - Livros e Teses

- Chandrasekhar, S., 1961, "Hydrodynamic and hydromagnetic stability". Dover
- Charru, S., 2011, "Hydrodynamic stability". Cambridge University Press
- D'Olce, M., 2008, "Instabilités de cisaillement dans l'écoulement concentrique de deux fluides miscibles". Thèse de l'Université Paris VI
- Drazin, P.G. and Reid, W.H., 2004, "Hydrodynamic stability". Cambridge University Press
- Franklin, E. M., 2008, "Dynamique de dunes isolées dans un écoulement cisaillé". Thèse de l'Université de Toulouse
- Van Dyke, M., 1982, "An albun of fluid motion". Parabolic Press
- Huerre, P. and Rossi, M., 1988, "Hydrodynamic instabilities in open flows". In *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*, Cambridge University Press, 81-294
- Landau, L. and Lifchitz, E., 1989, "Mécanique des Fluides", 2^a Ed., Moscou: MIR

Periódicos - Artigos clássicos

- Benney, D.J., 1966, "Long waves on liquid films". J. Math. Phys., Vol. 45, 150-155
- Charru, F. and Hinch, J.E., 2000, "Phase diagram of interfacial instabilities in a two-layer couette clow nd mechanism of the long-wave instability". J. Fluid Mech., Vol. 414, 195-223
- Donnelly, R.J. and Glaberson, W., 1966, "Experiments on the capillary instability of a liquid jet". Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 290, 547-556
- Faraday, M., 1831, "On a peculiar class of acoustic figures, and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces". Phil. Trans. R. Soc. London, 121, 299-340
- Fermigier, M., Limat L., Wesfrieid, J.E., Boudinet, P., Petitlean, M., Quilliet, C. and Valet, T., 1990, "Gravitational and Magnetic instabilities of thin fluid layers". Phys. Fluids, 1518

Periódicos - Artigos clássicos

- Gaster, M., 1962, “A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability”. J. Fluid Mech., 222-224
- Kapitza, P.L., 1948, “Wave flow of thin layers of a viscous liquid”. Zh. Eksp. Teor. Fiz. (trad. para o Inglês em *Collected papers of P. L. Kapitza*, Pergamon press, 1965)
- Landau, L., 1944, “On the problem of turbulence”. C. R. Acad. Sci. U.R.S.S., vol. 44, 311-314
- Liu, J., Paul, J.D. and Gollub, J.P., 1993, “Measurements of the primary instabilities of film flows”. J. Fluid Mech., Vol. 250, 69-101
- Werlé, H., 1980, “Transition and separation: Visualizations in the ONERA water tunnel”. Rech. Aérosp., Vol.5, 35-49

Periódicos - Artigos recentes

- Charru, F., Franklin, E.M., “Subaqueous Barchan dunes in turbulent shear flow”. Part 2: Fluid flow. J. Fluid Mech., v. 694, p. 131-154, 2012
- Franklin, E.M., “Initial instabilities of a granular bed sheared by a turbulent liquid flow: length-scale determination”. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., v. 32, p. 460-467, 2010
- Franklin, E.M. and Charru, F., “Subaqueous Barchan dunes in turbulent shear flow. Part 1: Dune motion”. J. Fluid Mech., v. 675, p. 199-222, 2011
- Franklin, E.M., “Nonlinear instabilities on a granular bed sheared by a turbulent liquid flow”. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., , v. 33, p. 265-271, 2011
- Franklin, E.M., Zambrano, C.A.A., “Length scale of density waves in the gravitational flow of fine grains in pipes”. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., accepted, 2015
- Franklin, E.M., “Formation of sand ripples under a turbulent liquid flow”. Appl. Math. Model., accepted, 2015

Websites

- http://www.nigelstanford.com
- https://commons.wikimedia.org
- https://en.wikipedia.org