PUC RIO

JEM 2017
Jornadas em Escoamentos Multifásicos

Equações de Conservação

Angela O. Nieckele

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Mecânica
DFC - Grupo de Dinâmica dos Fluidos Computacional

Objetivo

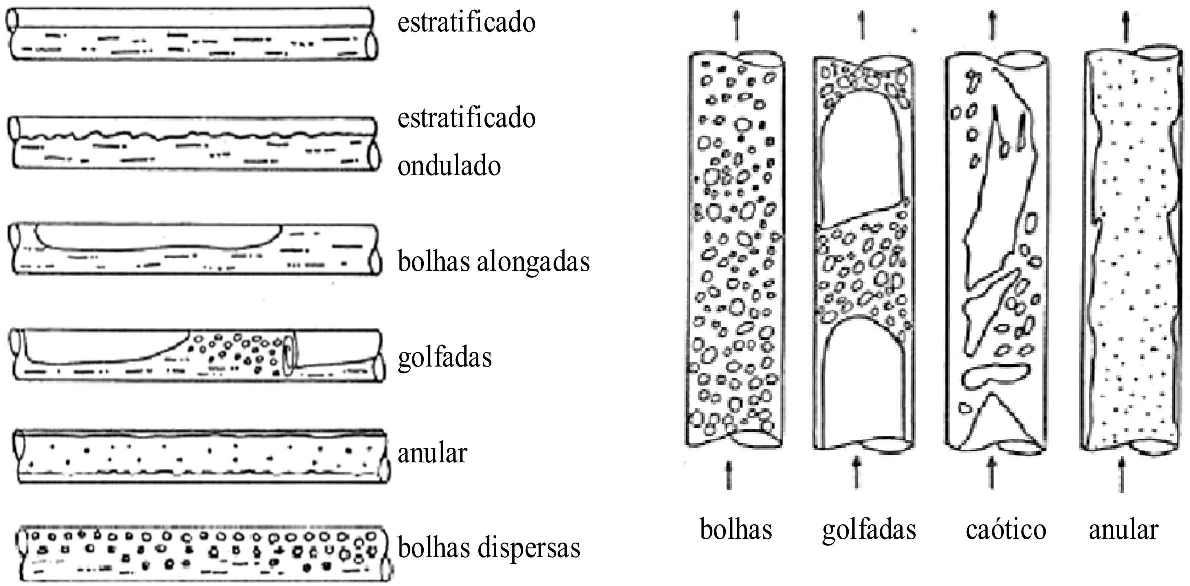
- Apresentação das equações de conservação para analisar escoamento multifásicos

Introdução

- Fases:
  - Sólida (partículas)
  - Líquido (uma ou mais imiscíveis)
  - Gás
- Escoamentos Bifásicos:
  - Gás/Líquido
  - Gás/Sólido
  - Líquido/Líquido
- Multifásico
  - Gás/Líquido/Líquido
  - Gás/Sólido/Líquido
  - Gás/Sólido/Líquido/Líquido

Introdução

- Classificados de acordo com a estrutura
  - Separados, misturados ou dispersos



Escoamento multifásicos são mais complexos de serem modelados do que escoamentos monofásicos, devido a estrutura complexa e desconhecida das interfaces

Introdução

- **Padrão de Escoamento:** A importância em conhecer o padrão de escoamento é clara. É necessário para:
  - avaliar a transferência de calor, queda de pressão, etc.,
  - Realizar cálculos, visando determinar a condição de operação de equipamentos.
  - modelar o escoamento, pois dependendo do padrão, diferentes aproximações e consequentemente modelos podem ser mais apropriados

Introdução

- ***Escoamento monofásico:***
  - Leis de conservação: massa, quantidade de movimento e energia
  - Condição de contorno: entrada, paredes, simetria e saída
  - Classificado em laminar ou turbulento
- ***Escoamento multifásico***
  - Mesma leis de conservação que o escoamento monofásico
  - Dificuldades:
    - Múltiplas interfaces, deformáveis, móveis e desconhecidas
    - Descontinuidade de propriedades
    - Campos complexos nas regiões de interface

Leis de Conservação para Escoamento Monofásico

- Conservação de massa $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\, \vec{u}) = 0$$
- Conservação de quantidade de movimento

$$\frac{\partial(\rho\, \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho\, \mathbf{u}\, \mathbf{u}) = -\nabla\, p^{r} + \nabla \bullet (\mu\, [\nabla\, \mathbf{u} + (\nabla\, \mathbf{u})^{T}])$$

$$p^{r} = p - \rho\, \mathbf{g} \bullet \mathbf{x} - \frac{2}{3}\mu\, \nabla \bullet \mathbf{u}$$

- Conservação de energia

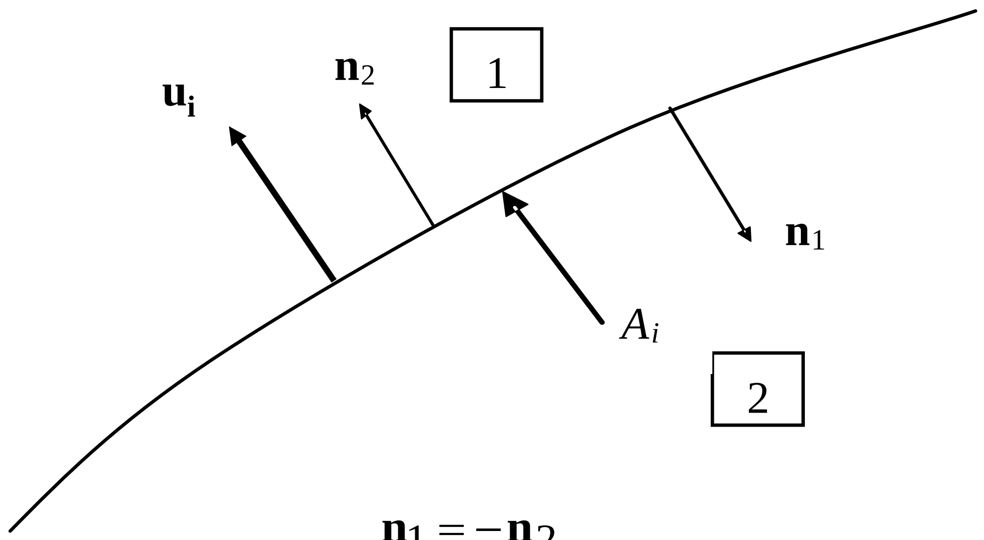
$$\frac{\partial(\rho\, h)}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho\, h\, \mathbf{u}) = -\nabla \bullet \mathbf{q} + \frac{D\, p}{D\, t} + \boldsymbol{\tau} : \nabla\, \mathbf{u} + \dot{q}$$

$$\mathbf{q} = -k\, \nabla\, T \qquad \frac{D(\quad)}{D\, t} = \frac{\partial(\quad)}{\partial\, t} + \mathbf{u} \bullet \nabla(\quad)$$

Leis de Conservação para Escoamento Multifásico

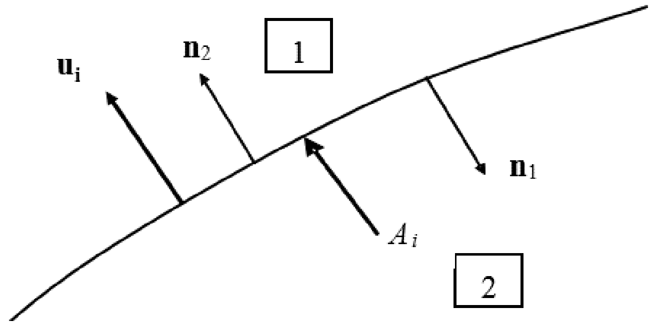
- Mesma leis de conservação que o escoamento monofásico

Balanços Interfaciais



$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$$

Balanços Interfaciais



- Fluxo de massa interfacial

$$\dot{m}_k \equiv \rho_k \, \mathbf{n}_k \bullet (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i)$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{ni} + \mathbf{u}_{ti}$$

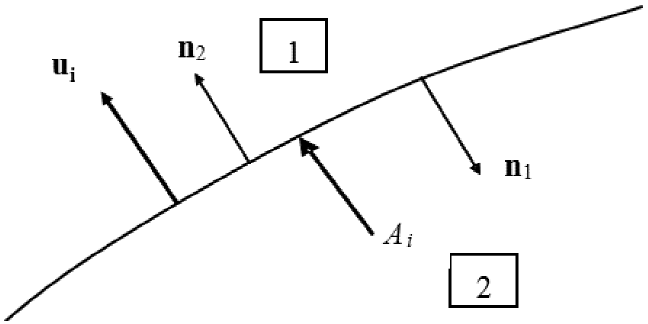
  - $\mathbf{u}_{ni}$ velocidade de deslocamento da interface $\mathbf{u}_{ni} = \mathbf{u}_i \bullet \mathbf{n}_k$
  - Posição da interface $S(\mathbf{x}, t)$ $\mathbf{u}_{ni} = \mathbf{u}_i \bullet \mathbf{n}_k = -\dfrac{\partial S / \partial t}{|\nabla S|}$

- Balanço de massa interfacial

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \, \mathbf{n}_k \bullet (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^{2} \dot{m}_k = 0$$

Balanços Interfaciais

- Fluxo *momentum* interfacial



$$\mathbf{M}_k = \rho_k \, \mathbf{n}_k \bullet (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i)\mathbf{u}_k - \mathbf{n}_k \bullet \sigma_k$$

$$\dot{m}_k \equiv \rho_k \, \mathbf{n}_k \bullet (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i) \qquad \sigma_k = -p_k \, \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_k$$

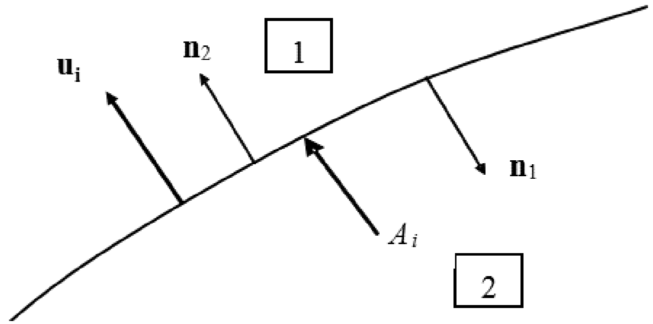
$$\mathbf{M}_k = \dot{m}_k \, \mathbf{u}_k + \mathbf{n}_k \bullet \left(p_k \, \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_k \right)$$

- Balanço de quantidade de movimento interfacial

$$\sum_{k=1}^{2} \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_m$$

Balanços Interfaciais

- Fonte de *momentum* de mistura



$$\mathbf{M}_m = 2\,\kappa\,\gamma\,\mathbf{n} + \mathbf{M}_m^{\kappa}$$

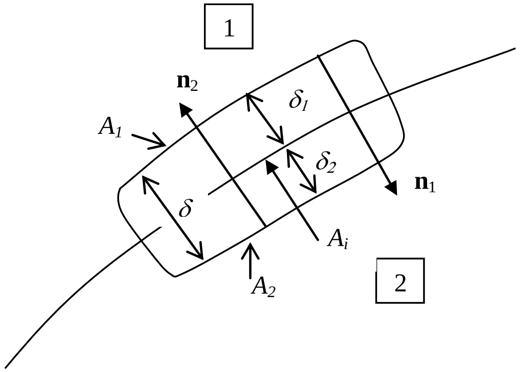
normal tangencial

- Parcela normal representa o efeito líquido da curvatura da interface, onde κ é a curvatura média da superfície e γ é a tensão superficial.

- Parcela tangencial devido ao gradiente da tensão superficial.

Balanços Interfaciais

- Balanço de energia



  - Energia interna por unidade de área interfacial:

$$i_a = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta_2}^{\delta_1} i \, d\delta$$

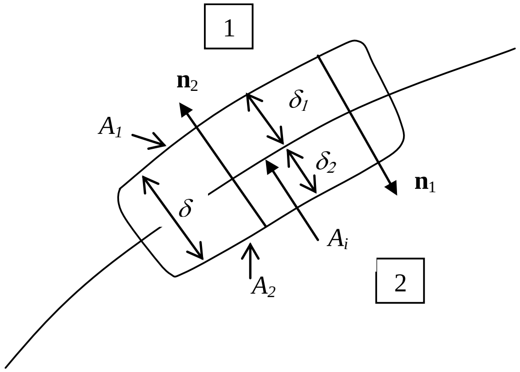
$$\frac{\partial i_a}{\partial t} + i_a \nabla \bullet \mathbf{u}_i = \mathbf{M}_k \bullet \mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^{2}\left[\rho_k \mathbf{n}_k \bullet (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_i)\left(i_k + \frac{u_k^2}{2}\right) + \mathbf{n}_k \bullet \left(-\sigma_k \bullet \mathbf{u}_k + \mathbf{q}_k\right)\right]$$

taxa de variação da energia da superfície

trabalho realizado pela tensão superficial

transferência de energia do fluido de cada lado da interface

Balanços Interfaciais



- Fluxo energia interfacial

$$E_k = \dot{m}_k \left(i_k + \frac{u_k^2}{2} \right) + \mathbf{n}_k \bullet \left[\left(p_k \, \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_k \right) \bullet \mathbf{u}_k + \mathbf{q}_k \right]$$

- Balanço de energia interfacial $\sum_{k=1}^{2} E_k = E_m$

  - Fonte de energia de mistura: E_m

Escoamentos Multifásicos

- Formulação local e instantânea para escoamentos multifásicos é muito difícil

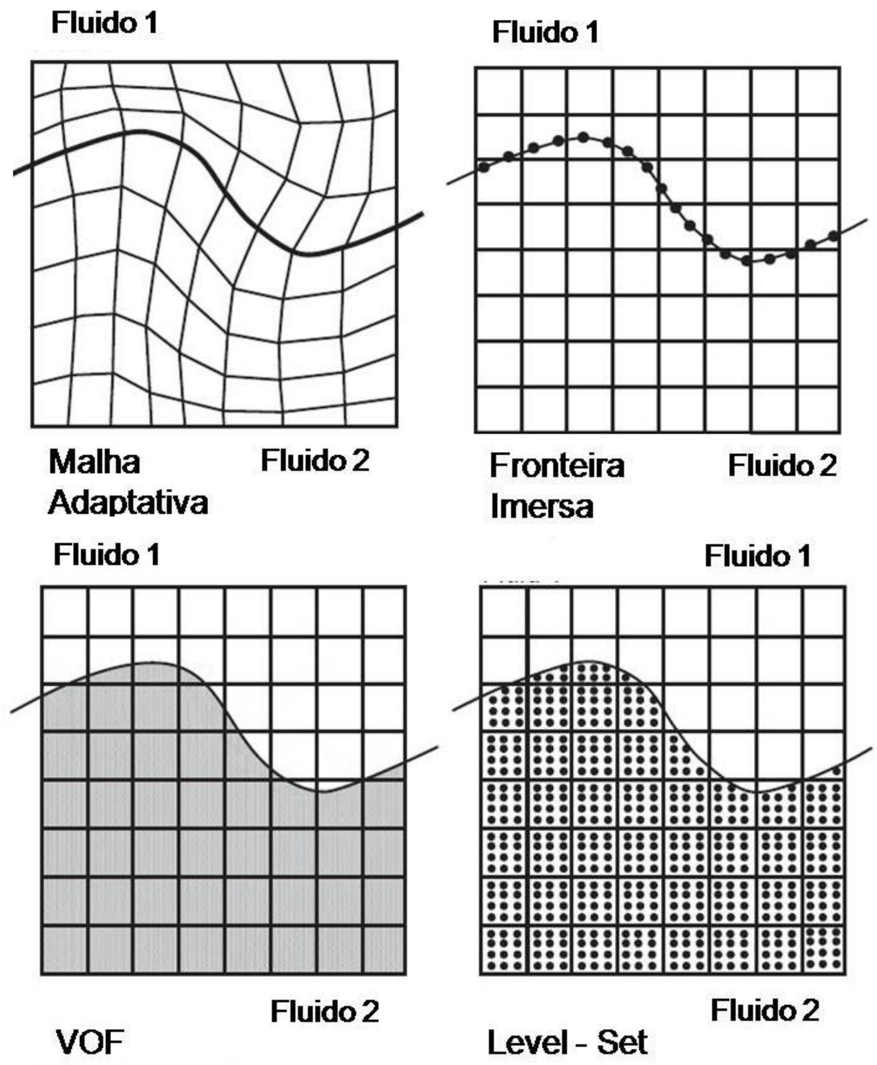
Classes de Modelos

- Modelos de “um fluido”: solução detalhada das equações de Navier Stokes
- Modelos de equações reduzidas, uso de grandezas médias

Modelos de “um fluido”

Modelos de “um fluido”

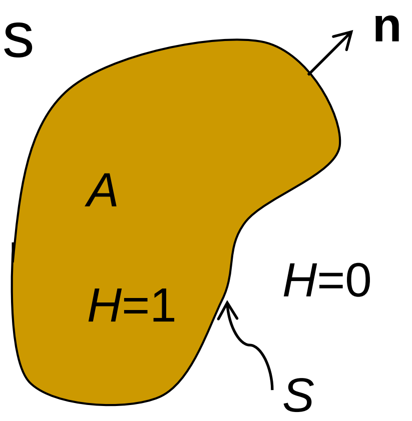
- solução detalhada das equações de Navier Stokes:
  - Malha Adaptativa
  - Fronteira Imersa
  - Volume of Fluid (VOF)
  - Level-Set



Modelos de "um fluido"

- Os diferentes fluidos podem ser identificados com a função degrau H (Heaviside).

  Fluido 1: H = 1, Fluido 2: H = 0

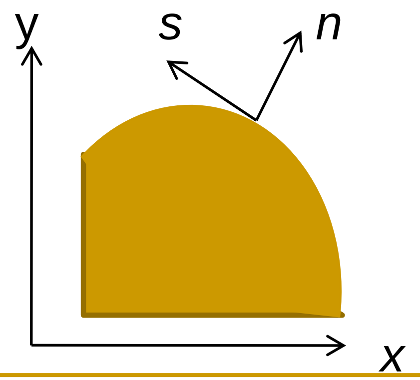


$$H(x,y)=\int_A \delta(x-x')\,\delta(y-y')\,d\,a'$$

- O gradiente de H pode ser avaliado utilizando o teorema de divergência

$$\nabla H=-\int_{S(t)}\delta(x-x')\delta(x-x')\,\mathbf{n}\,ds'$$

- introduzindo coordenadas locais, tangente (s) e normal (n) à frente



$$\nabla H(x,y)=-\int_S \delta(s')\,\delta(n')\,\mathbf{n}'\,d\,s' \;=-\,\delta(n)\,\mathbf{n}$$

Modelos de “um fluido”: Tratamento das Propriedades

- Massa específica:

$$\rho(x,y) = \rho_1\, H(x,y) + \rho_o\,[1 - H(x,y)]$$

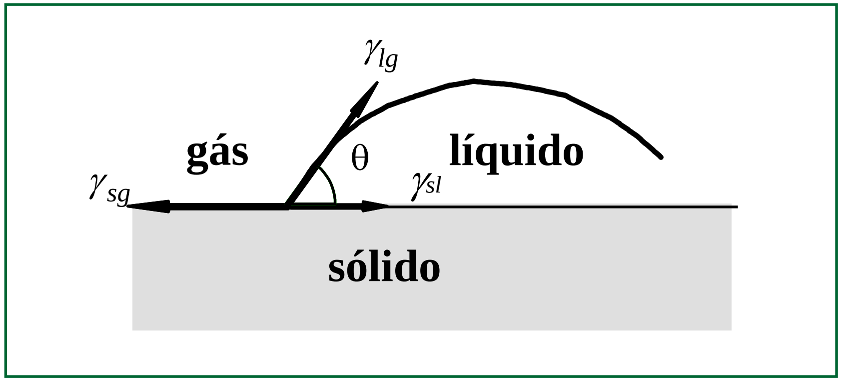
$$\nabla \rho(x,y) = (\rho_1 - \rho_o)\,\nabla H(x,y) = (\rho_1 - \rho_o)\,\delta(n)\,\mathbf{n}$$

- Equações análogas podem ser escritas para as outras propriedades, como viscosidade e propriedades termo-físicas

- Ângulo de contato

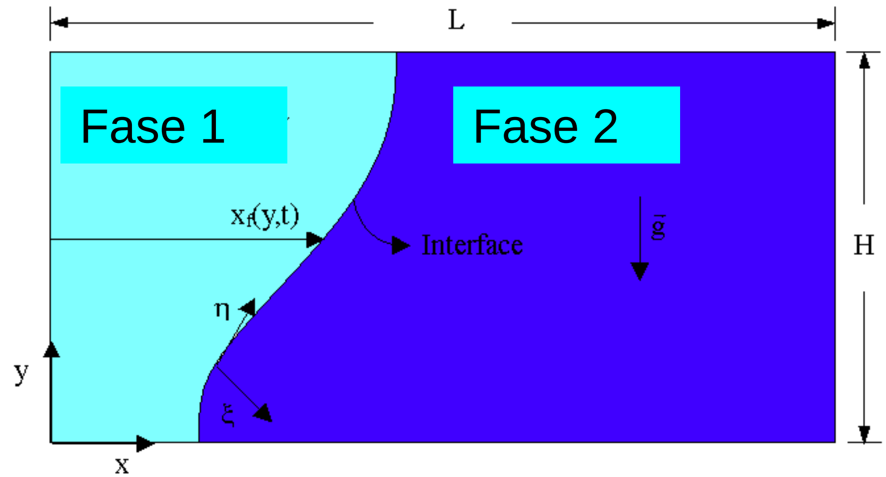
$$\theta = \mathbf{arccos}\left(\frac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}}\right)$$

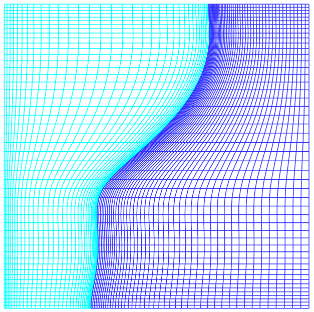
γ = tensão interfacial

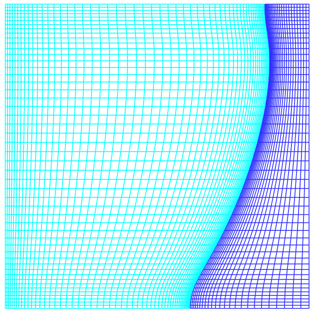


Malha Adaptativa

- Equações de conservação são escritas em um sistema de coordenadas curvilíneas móvel.
- Movimento da interface governado pelas condições de salto de massa, quantidade de movimento e energia na interface.

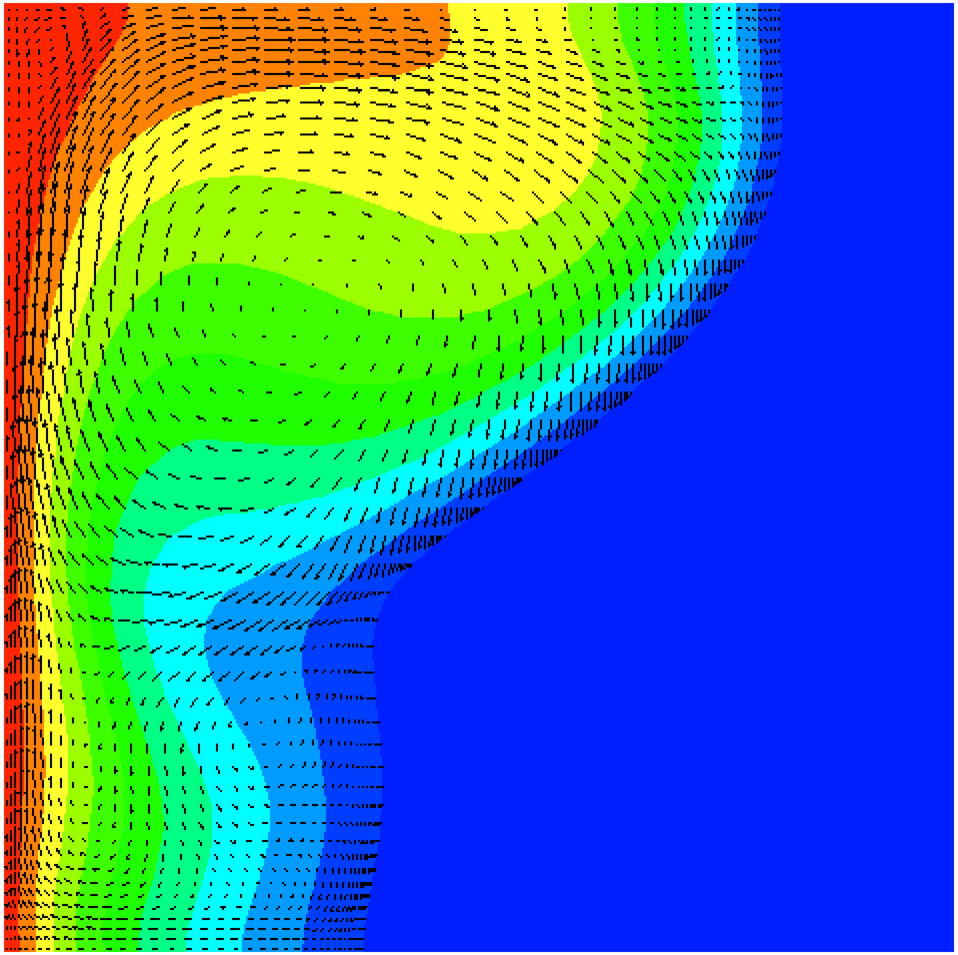






$$\frac{\partial(\rho\,\mathbf{u})}{\partial t} + \underbrace{\nabla \bullet (\rho\,\tilde{\mathbf{u}}\,\mathbf{u})}_{\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{mesh}} = -\nabla p^{r} + \nabla \bullet (\mu\,[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{T}])$$

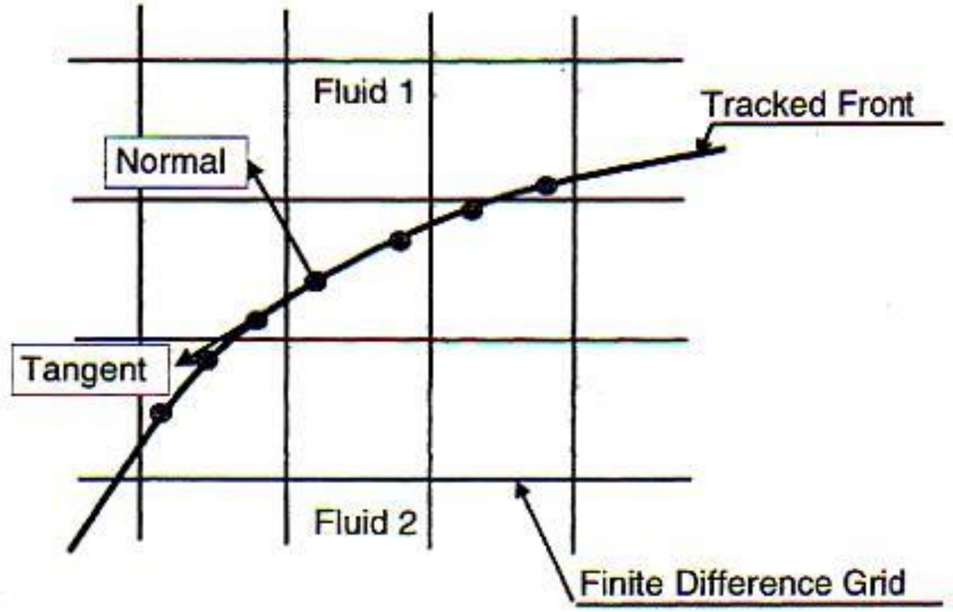
Malha Móvel – Fusão em uma cavidade



(Rocha e Nieckele, 2000)

Método de Fronteira Imersa

- As equações de Navier-Stokes são resolvidas em uma malha fixa
- Uma frente móvel e deformável é usada para marcar a interface



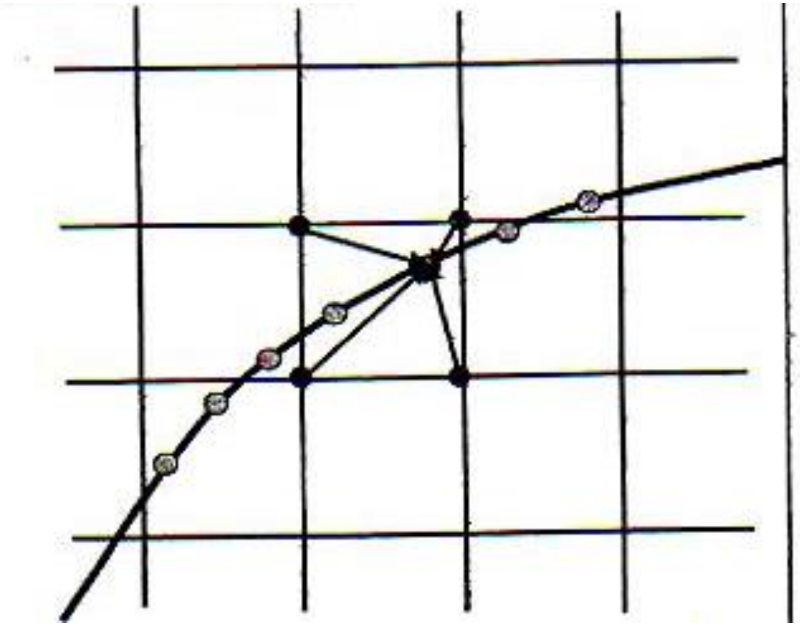
Conhecendo informações da frente, as direções normais e tangenciais são facilmente obtidas

Método de Fronteira Imersa

- Interpolando da malha
  - As velocidades da malha fixa são interpoladas para serem utilizadas na malha móvel

$$\phi_{ijk} = \sum \phi_\ell \, w_{ijk}$$

Os pesos w_{ijk} podem ser selecionados de diferentes formas



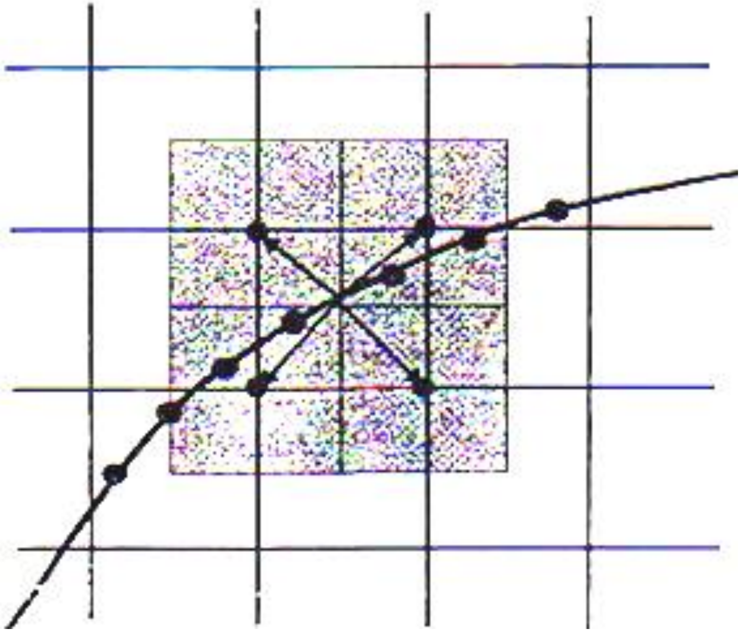
Método de Fronteira Imersa

- Aproximando os termos singulares
  - Os valores da frente são distribuídos na malha fixa

na frente: por comprimento

na malha: por volume

$$\phi_{ijk} = \sum \phi_\ell \, w_{ijk} \frac{\Delta S_\ell}{h^3}$$



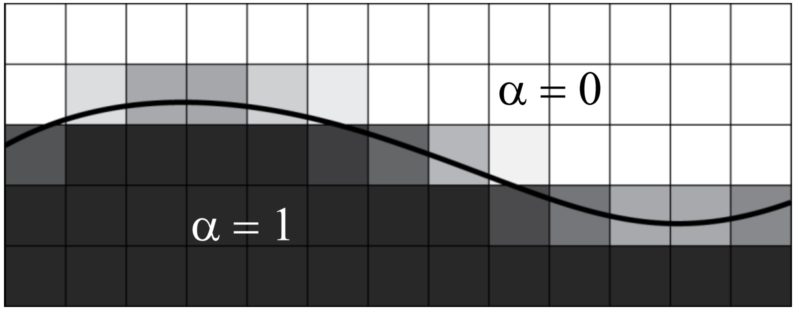
Métodos de Captura de Interface: VOF e Level-Set

- Função marcadora: *C*
  - **VOF**: *fração volumétrica de uma fase*
  - **Level-Set:** *distância à interface*
- Evolução da função marcadora

$$\frac{DC}{Dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \bullet \nabla C = 0$$

VOF

- Função marcadora:
  - *fração volumétrica de uma fase*



Phase 1 $\alpha = 1$

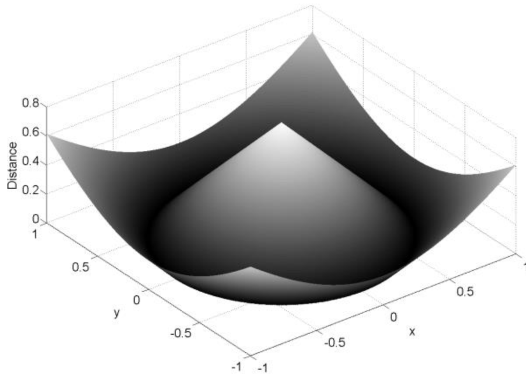
Phase 2 $\alpha = 0$

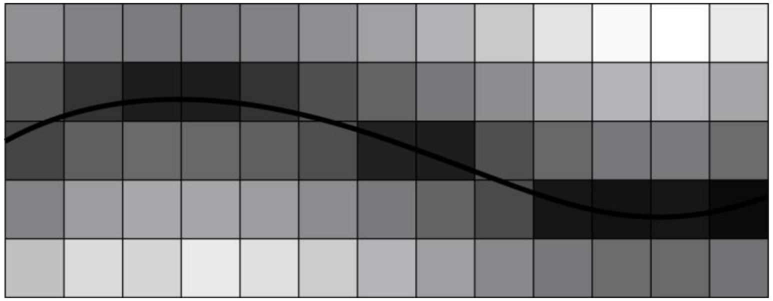
interface $\alpha \in (0,1)$

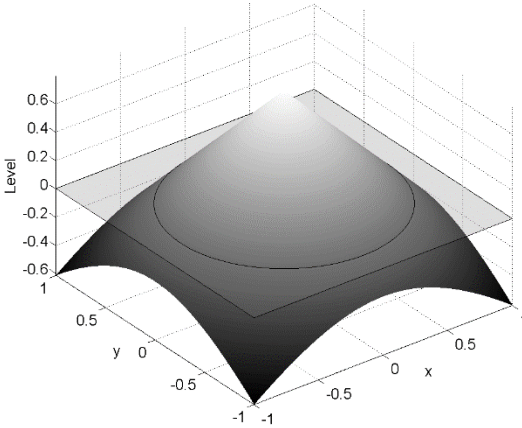
- *Excelente em satisfazer a conservação de massa.*
- *Dificuldades com falsa difusão.*

Level-Set

- Função marcadora:
  - *Função Distância com Sinal*







  - *O campo distância é suave ao longo de todo o domínio, inclusive ao redor das interfaces.*
  - *Problemas em satisfazer conservação de massa.*

Modelos de “um fluido”

- Equações de conservação:
  - Conservação de Massa: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \, \mathbf{u} \right) = 0$$
  - Conservação de Quantidade de Movimento Linear

$$\frac{\partial \left(\rho \, \mathbf{u} \right)}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho \, \mathbf{u} \, \mathbf{u} \right) = - \nabla \, p^{\mathrm{r}} + \nabla \bullet \left(\mu \left[\nabla \mathbf{u} + \left(\nabla \mathbf{u} \right)^{\mathrm{T}} \right] \right) + \boxed{\gamma \, \kappa \, \delta(n) \, \mathbf{n}}$$

$$p^{\mathrm{r}} = p - \rho \, \mathbf{g} \bullet \mathbf{x} - \frac{2}{3} \mu \, \nabla \bullet \mathbf{u}$$

$$\kappa = \nabla \bullet \mathbf{n}$$

κ= raio de curvatura

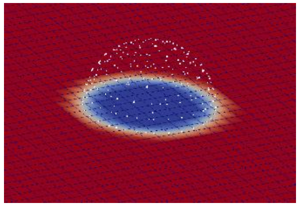
γ= tensão interfacial

Estimativa da Curvatura

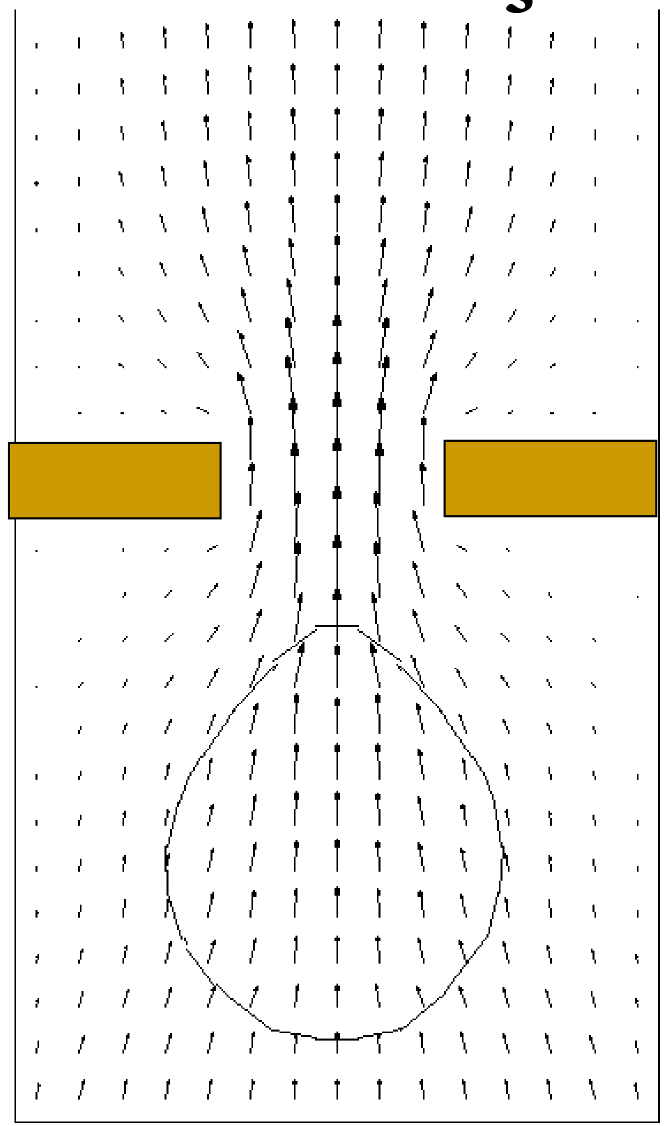
- CSF (Continuous Surface Force)

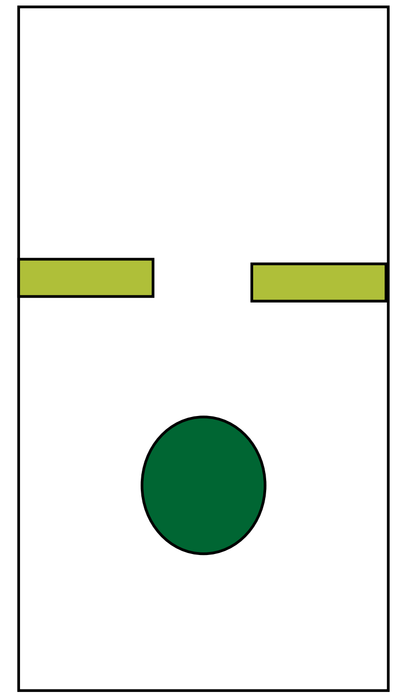
$$\kappa = \nabla \bullet \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \qquad \gamma\, \kappa\, \delta(n)\, \mathbf{n} = \gamma\, \nabla \bullet \left(\frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \right) \nabla \alpha$$

- Level-Set / VOF acoplamento
- Height-Function
- Reconstructed Distance Function (RDF)
- Kernels suavisado no VOF field
- Campo de VOF ajustado com superficies em intervalos quadráticos
- Point-cloud VOF

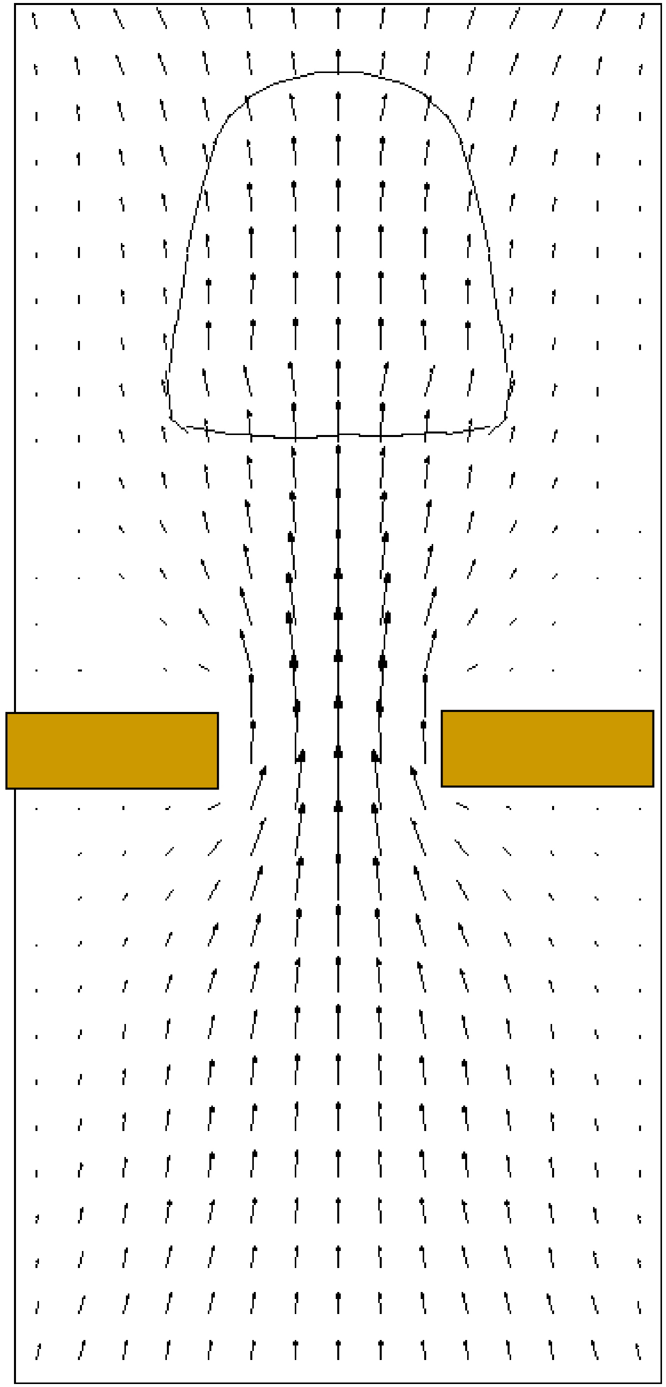


Movimento ascendente de uma bolha através de uma restrição

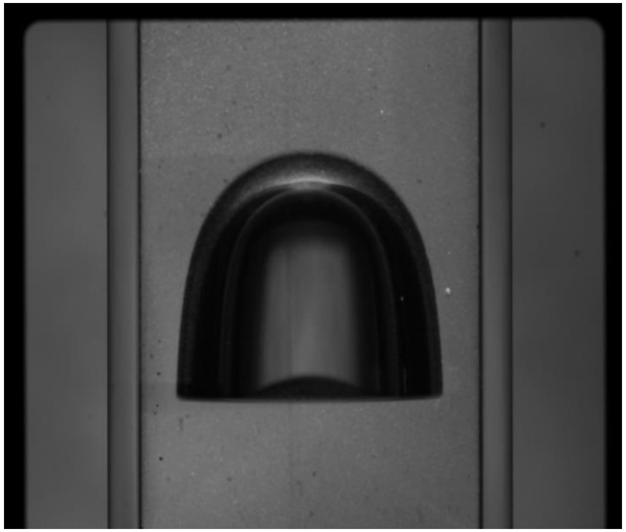




(Melo e Nieckele, 1995)



(Melo e Nieckele, 1995)



(Azevedo, 2005)

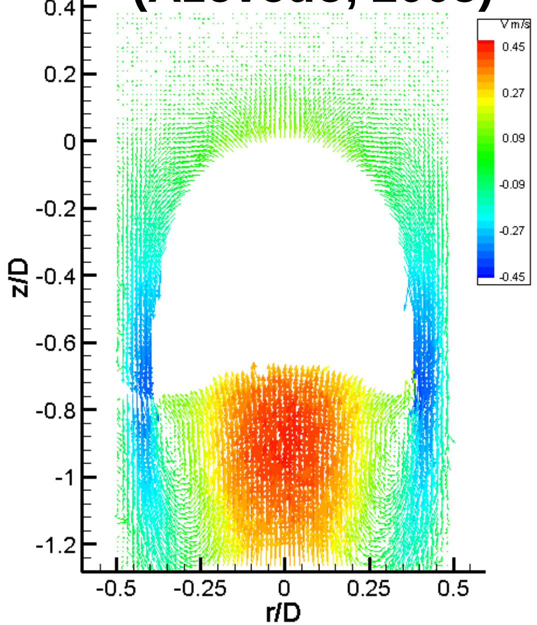
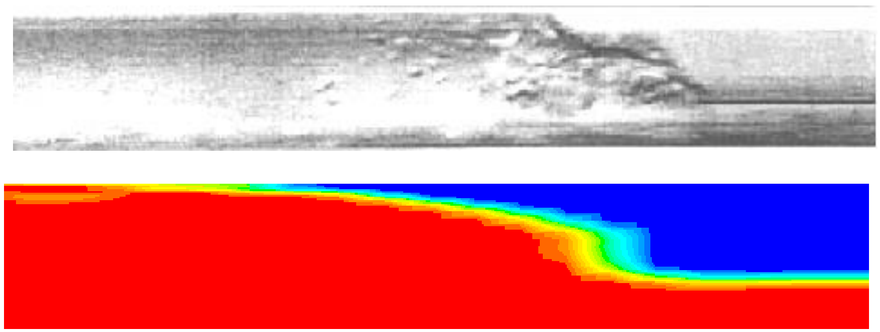


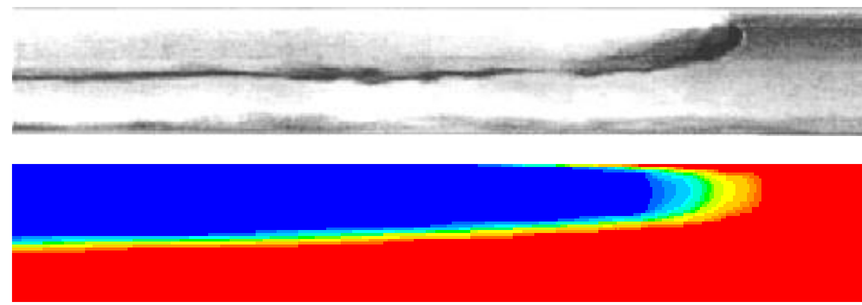
Imagem de uma bolha de Taylor e campo de velocidade com PIV

Formação de Golfada

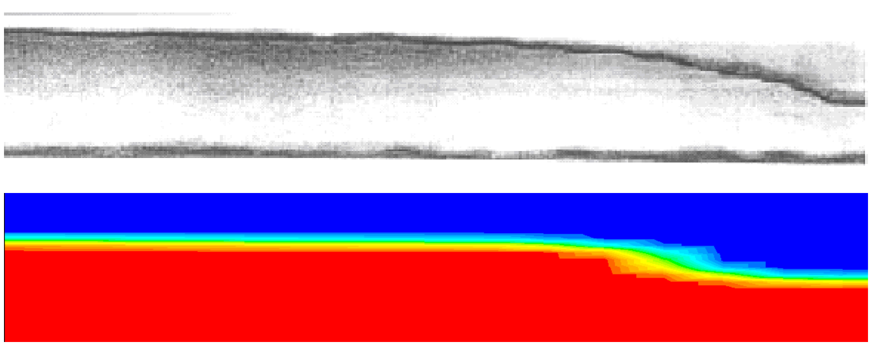
- Escoamento água/ar em uma tubulação com 2 in de diâmetro
  - solução numérica com VOF (Febres, 2009)
  - experimental (Fagundes Netto, 1999)

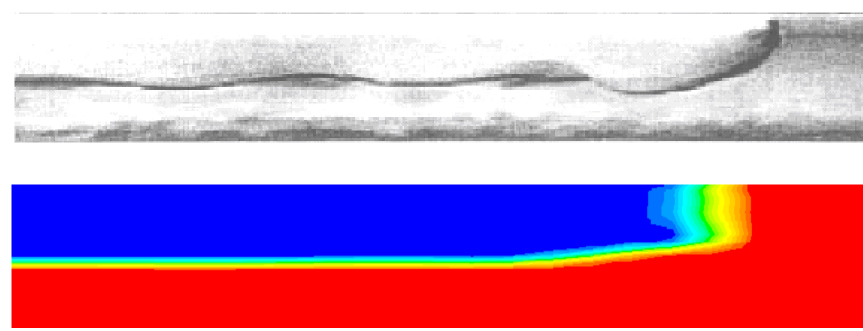
Calda da golfada | **Nariz da golfada**





$U_m = 1{,}8$ m/s





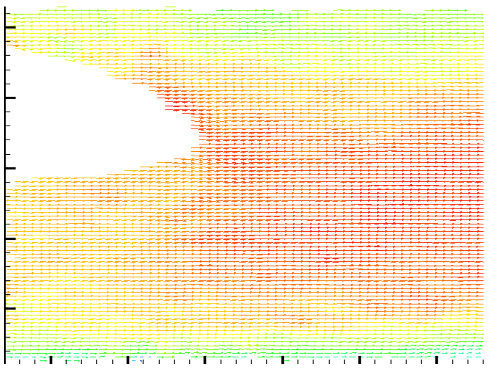
$U_m = 0{,}6$ m/s

Formação de Golfada

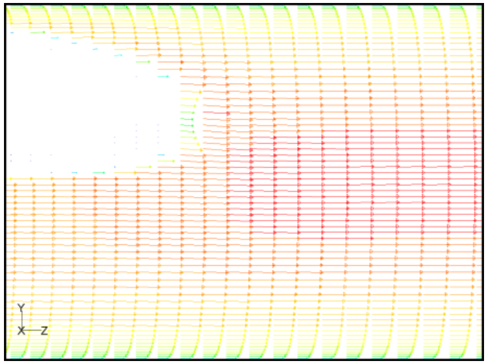
- Escoamento água/ar em uma tubulação com 1 in de diâmetro

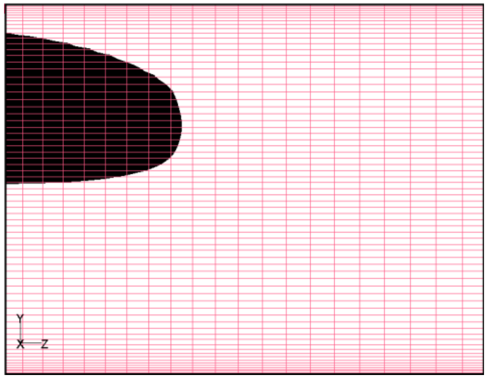
U_m= 0,6 m/s

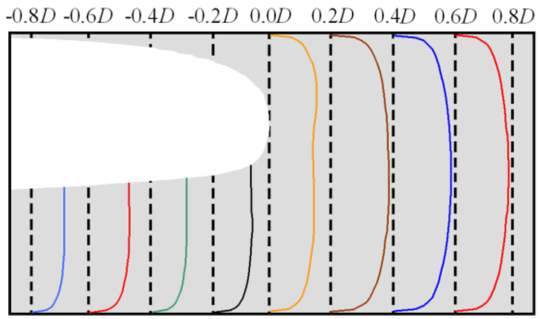
experimental
(Fonseca Jr, 2009)

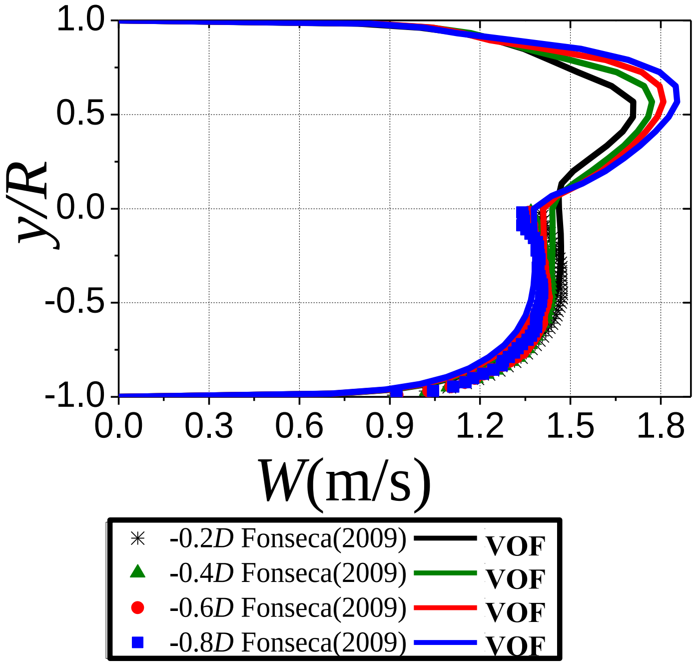


numérico
VOF (Febres, 2009)



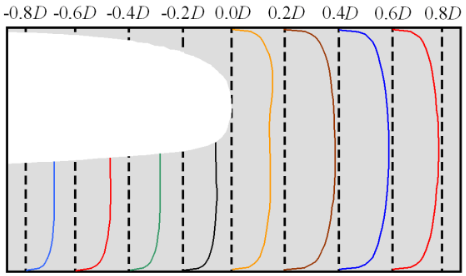




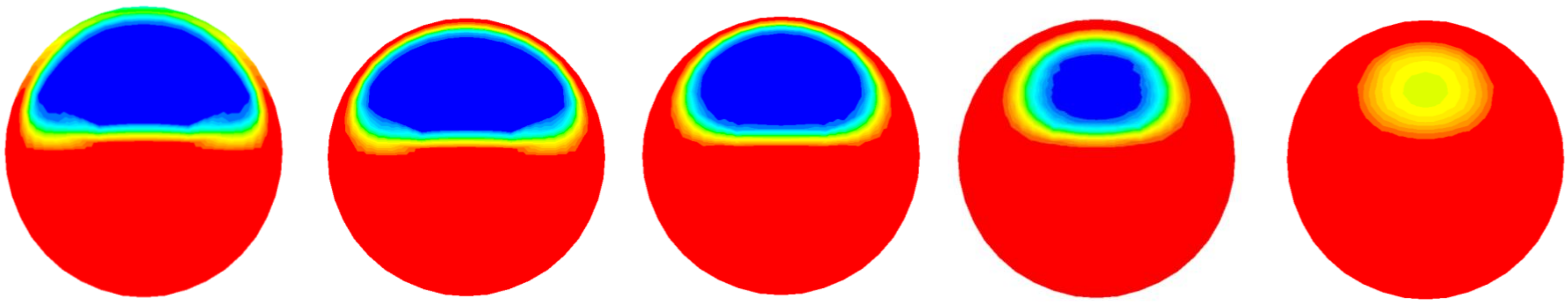


Formação de Golfada

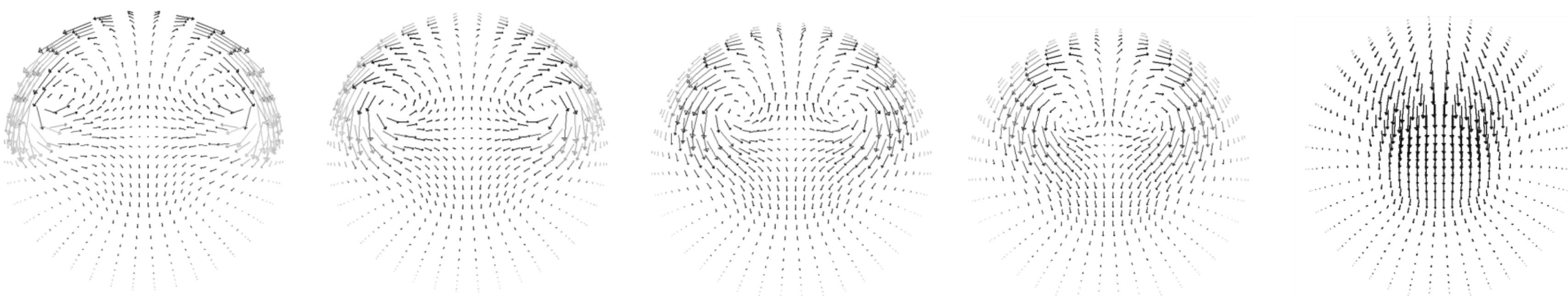
- Escoamento água/ar em uma tubulação com 1 in de diâmetro



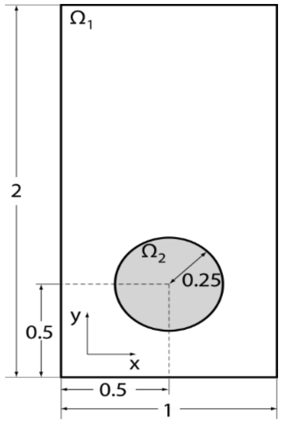
U_m= 0,77 m/s



- 0,8*D* | -0,6 D | -0,4 *D* | -0,2*D* | 0,0 *D*

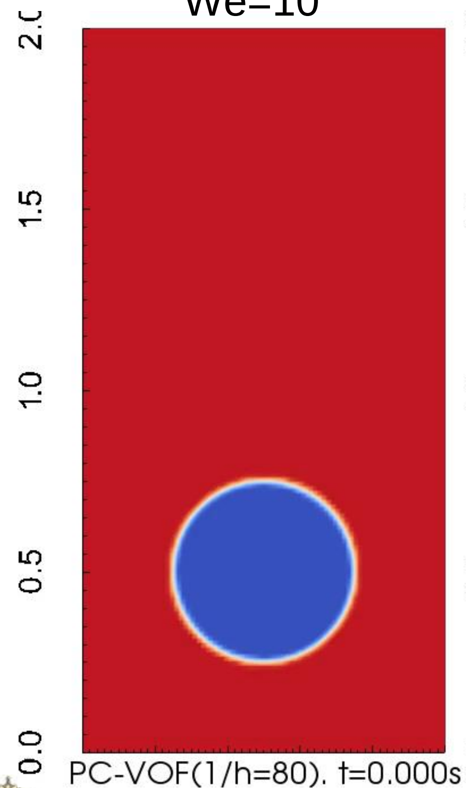


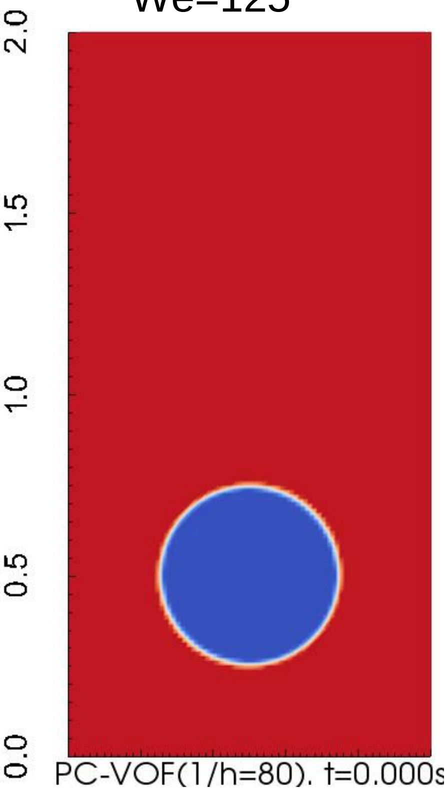
Bolha ascendente

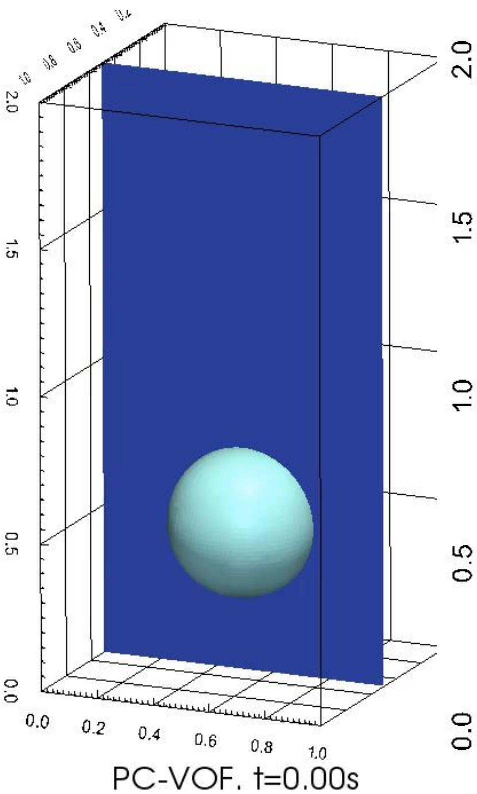


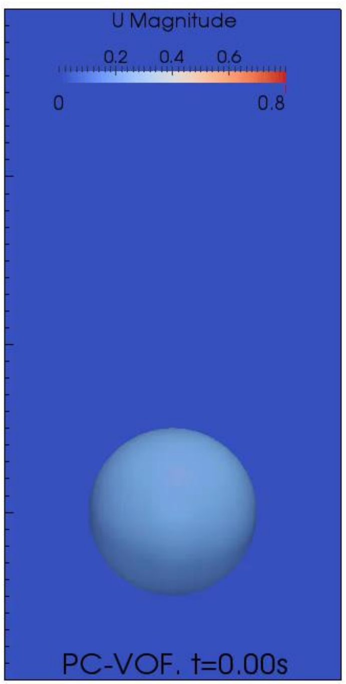
Re=35
Eo=9
Ca=0,286
We=10

Re=35
Eo=125
Ca=3,571
We=125









Kassar et al, Cobem, 2015
Kassar et al, ICMF, 2016

Modelos de Equações Reduzidas

Modelos de Equações Reduzidas

- O escoamento em geral é caótico, com a exceção de casos muito simples. Uma descrição estatística é necessária.

- É necessário definir propriedades médias da mistura: médias no volume, na área, médias temporais, médias de conjunto, ou uma combinação destas.

Definição de Médias

- Média espacial:

volume

$$\frac{1}{\Delta \forall} \int_{\Delta \forall} F(t,\mathbf{x}) \, d\forall(\mathbf{x})$$

área

$$\frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A} F(t,\mathbf{x}) \, dA$$

linha

$$\frac{1}{\Delta C} \int_{\Delta C} F(t,\mathbf{x}) \, dC$$

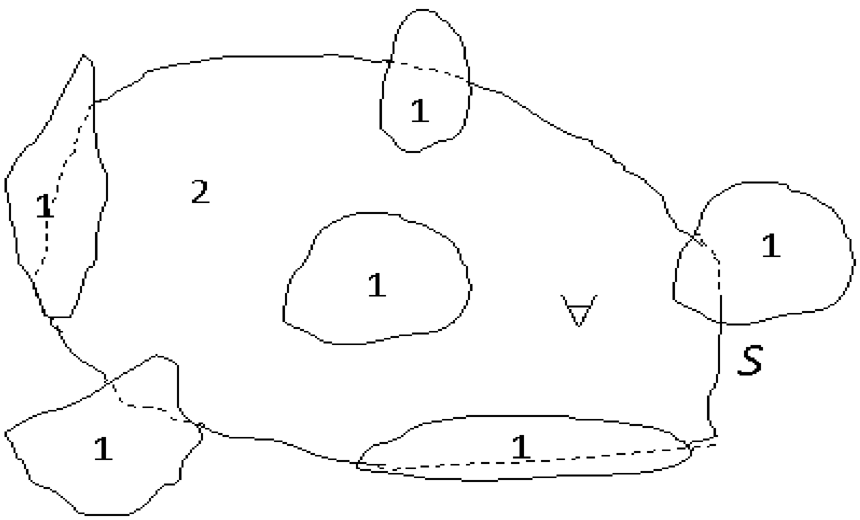
- Média temporal: $$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} F(t,\mathbf{x}) \, dt$$

- **Média temporal:** intervalo de tempo [Δt] deve ser grande o suficiente para suavizar as variações locais das propriedades, mas pequeno o suficiente quando comparado com o tempo macroscópico do escoamento.

Definição de Médias

- Médias no volume da fase $\qquad \bar{Z}_k(\mathbf{x},t) = \dfrac{1}{\forall_k} \displaystyle\int_{\forall_k} Z_k \, d\forall$

- Fração volumétrica da fase k : $\qquad \alpha_k = \dfrac{\forall_k}{\forall}$



•Volume: $\forall = \forall_1 + \forall_2 \;\rightarrow\; \alpha_1 + \alpha_2 = 1$

•Fronteira do volume $\forall$: $S = S_1 + S_2$

• S_1 (pontilhada) e S_2 são as partes de $\forall$ que estão em contato com as fases 1 e 2

• A soma das interfaces separando as duas fases dentro de $\forall$ é S_i.

Formulação de Médias

- Consequências do processo de média
  - suavização das flutuações de forma análoga a que ocorre em um escoamento monofásico turbulento
  - existência de duas fases, que ocupam alternadamente um elemento de volume, no mesmo ponto, com uma probabilidade adequada para cada fase

Modelos de Equações Reduzidas

- ***Modelos de Dois Fluidos***
  - Fases separadas, um conjunto de equações de conservação para cada fase
- ***Modelo de Deslizamento (Drift)***
  - Modelo intermediário entre os outros dois. Determina o escoamento médio, porém, permite deslizamento entre as fases
- ***Modelo Homogêneo***
  - Pseudo propriedades de um único fluido

O Modelo de Deslizamento e o Modelo Homogêneo podem ser obtidos a partir do Modelo de Dois Fluidos

Modelos de Equações Reduzidas

- Processo de obtenção do conjunto de equações que caracteriza o Modelo de Dois Fluidos

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} F(t,\mathbf{x})\,dt$$

Média Temporal

Navier-Stokes

- Formulação local instantânea para cada fase
- Equações constitutivas/Salto na Interface

Modelo de Dois Fluidos 3D

- Equações médias para cada fase
- Equações constitutivas e fontes interfaciais

Equações Médias 3D

Conservação média volumétrica de massa

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\overline{\rho}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\overline{\rho_k\,\mathbf{u}_k}\right)=\Gamma_k$$

$$\Gamma_k=-\frac{1}{\forall}\int_{S_i}\dot{m}_k\,dS_i \qquad \dot{m}_k=\rho_k\,(\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_i)\bullet\mathbf{n}_k \qquad \sum_{k=1}^{N}\Gamma_k=0$$

fluxo de massa da fase *k* através da interface S_i

Média de Favre:

$$\hat{\mathbf{u}}_k=\frac{\overline{\rho_k\,\mathbf{u}_k}}{\overline{\rho}_k}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\alpha_k\,\overline{\rho}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\right)=\Gamma_k}$$

fluxo volumétrico da fase *k* ou velocidade superficial.

$$\mathbf{j}_k=\alpha_k\,\hat{\mathbf{u}}_k$$

Equações Médias 3D

Equação média volumétrica de conservação de quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial(\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{u}_k})}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k}\right) =$$

$$\nabla \bullet (\alpha_k \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k) + \alpha_k \bar{\rho}_k \mathbf{g} + \mathbf{M}_k$$

$$\boldsymbol{\sigma}_k = -p_k \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_k \quad ; \quad \boldsymbol{\tau}_k = \mu_k \left[\nabla \mathbf{u}_k + (\nabla \mathbf{u}_k)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3} \nabla \bullet \mathbf{u}_k \, \mathbf{I}\right]$$

Fluido Newtoniano

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_m$$

Equações Médias 3D

Equação média volumétrica de conservação de quantidade de movimento linear

Média de Favre: $$\overline{\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k} = \overline{\rho}_k \widehat{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k}$$

Introduzindo a definição de flutuação $$\mathbf{u}'_k = \mathbf{u}_k - \hat{\mathbf{u}}_k$$

$$\widehat{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k} = \hat{\mathbf{u}}_k \hat{\mathbf{u}}_k + \overline{\mathbf{u}'_k \mathbf{u}'_k} = \hat{\mathbf{u}}_k \hat{\mathbf{u}}_k - \overline{\boldsymbol{\tau}}'_k$$

$$\nabla \bullet \left(\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k}\right) = \nabla \bullet \left(\alpha_k \overline{\rho}_k \hat{\mathbf{u}}_k \hat{\mathbf{u}}_k\right) - \nabla \bullet \left(\alpha_k \overline{\boldsymbol{\tau}}'_k\right)$$

Equações Médias 3D

Equação média volumétrica de conservação de quantidade de movimento linear

$$\boldsymbol{\sigma}_k = -p_k\,\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_k$$

$$\nabla \bullet (\alpha_k\,\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k) = -\nabla(\alpha_k\,\overline{p}_k) + \nabla \bullet (\alpha_k\,\overline{\boldsymbol{\tau}}_k)$$

$$\nabla \bullet (\alpha_k\,\overline{\boldsymbol{\sigma}}_k) = -\,\alpha_k\,\nabla\overline{p}_k - \overline{p}_k\,\nabla\alpha_k + \nabla \bullet (\alpha_k\,\overline{\boldsymbol{\tau}}_k)$$

$$\mathbf{M}_k = \Gamma_k\,(\mathbf{u}_{ki} - \hat{\mathbf{u}}_k) + p_{ki}\nabla\alpha_k - \nabla\,\alpha_k \bullet \boldsymbol{\tau}_{ki} + \mathbf{M}_{ki}$$

Força de arraste generalizada

Equações Médias 3D

Equação média volumétrica de conservação de quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\bar{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k)}{\partial t} + \nabla\bullet\left(\alpha_k\,\bar{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\right) = -\alpha_k\nabla\,\bar{p}_k +$$

$$+\nabla\bullet\left[\alpha_k\,(\,\bar{\tau}_k + \overline{\tau'_k})\right] + \alpha_k\,\bar{\rho}_k\,\mathbf{g} +$$

$$+(\mathbf{u}_{ki} - \hat{\mathbf{u}}_k)\Gamma_k + (p_{ki} - \bar{p}_k)\nabla\,\alpha_k - \nabla\alpha_k\bullet\tau_{ki} + \mathbf{M}_{ki}$$

- Equações de fechamento: Γ_k ; $\mathbf{M}_{ki}$; $\overline{\tau'_k}$; τ_{ki}

Equações Médias 3D

Equação média volumétrica de conservação de energia

$$\frac{\partial(\alpha_k \overline{\rho_k h_k})}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\alpha_k \overline{\rho_k \mathbf{u}_k h_k}\right) = \alpha_k \overline{\dot{q}_k}$$

$$- \nabla \bullet (\alpha_k \overline{\mathbf{q}}_k) + \frac{D_k(\alpha_k \overline{p}_k)}{D t} + \alpha_k \overline{\boldsymbol{\tau}_k : \mathbf{u}_k} + E_k$$

$$E_k = \Gamma_k \left(h_{ki} + \mathbf{u}_{ki} \bullet \hat{\mathbf{u}}_k - \frac{\hat{u}_k^2}{2} \right) + q_{ki} - p_{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \left[\mathbf{M}_{ki} - \nabla \alpha_k \bullet \boldsymbol{\tau}_{ki}\right] \bullet \mathbf{u}_{ki}$$

$$\sum_{k=1}^{N} E_k = E_m$$

Equações Médias 3D

Equação média volumétrica de conservação de energia

Introduzindo a média Favre e a definição de flutuação

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\overline{h}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\,\overline{h}_k\right)=\alpha_k\,\overline{\dot{q}_k}+$$

$$-\nabla\bullet\left[\alpha_k(\overline{\mathbf{q}}_k+\overline{\mathbf{q}'_k})\right]+\alpha_k\frac{D_k<p_k>}{Dt}+\phi_k^{\mu}+\phi'_k+$$

$$+\Gamma_k\,h_{ki}+q_{ki}+(\overline{p}_k-p_{ki})\frac{D_k\alpha_k}{Dt}+\left[\mathbf{M}_{ki}-\nabla\alpha_k\bullet\boldsymbol{\tau}_{ki}\right]\bullet(\mathbf{u}_{ki}-\hat{\mathbf{u}}_k)$$

$$\phi_k^{\mu}=\alpha_k\,\overline{\boldsymbol{\tau}}_k:\nabla\hat{\mathbf{u}}_k \quad ; \quad \phi'_k=\alpha_k\overline{\boldsymbol{\tau}'_k:\nabla\mathbf{u}'_k}-\overline{\mathbf{u}'_k\bullet\nabla\bullet(\alpha_k\,\boldsymbol{\tau}'_k)}$$

Dissipação viscosa — Fonte de energia turbulenta

Equação de Energia Simplificada

- Desprezando:
  - geração de calor
  - termos devido aos efeitos mecânicos

    (transferência de calor e mudança de fase dominantes)

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\overline{h}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\,\overline{h}_k\right)=$$

$$=-\nabla\bullet[\alpha_k(\overline{\mathbf{q}}_k+\overline{\mathbf{q}'_k})]+\Gamma_k\,h_{ki}+q_{ki}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\Gamma_k\,h_{ki}+q_{ki}=0$$

Modelos de Dois Fluidos Isotérmico

- Conservação de massa para cada fase

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\overline{\rho}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\right)=\Gamma_k$$

- Conservação de quantidade de movimento para cada fase

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\right)=-\alpha_k\nabla\,\overline{p}_k+$$

$$+\nabla\bullet\left[\alpha_k\left(\,\overline{\tau}_k+\overline{\tau'_k}\right)\right]+\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\mathbf{g}+$$

$$+(\mathbf{u}_{ki}-\hat{\mathbf{u}}_k)\Gamma_k+(p_{ki}-\overline{p}_k)\nabla\,\alpha_k-\nabla\alpha_k\bullet\tau_{ki}+\mathbf{M}_{ki}$$

Modelos de Deslizamento (Drift)

- Conservação de massa
  - para cada fase

$$\frac{\partial(\alpha_k\,\bar{\rho}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_k\,\bar{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\right)=\Gamma_k \qquad k=1 \quad e \quad 2$$

ou

  - uma fase e a mistura, onde a conservação da mistura é obtida somando as equações de conservação de cada fase

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\rho_m\,\mathbf{u}_m\right)=0 \qquad \frac{\partial(\alpha_1\,\bar{\rho}_1)}{\partial t}+\nabla\bullet\left(\alpha_1\,\bar{\rho}_1\;\mathbf{u}_m\right)=\Gamma_1+\nabla\bullet\left[\alpha_1\,\bar{\rho}_1\;\left(\mathbf{u}_m-\hat{\mathbf{u}}_1\right)\right]$$

$$\rho_m=\alpha_1\,\bar{\rho}_1+\;\alpha_2\,\bar{\rho}_2 \qquad \rho_m\,\mathbf{u}_m=\alpha_1\,\bar{\rho}_1\,\hat{\mathbf{u}}_1+\;\alpha_2\,\bar{\rho}_2\,\hat{\mathbf{u}}_2$$

Modelos de Deslizamento (Drift)

- Conservação de quantidade de movimento para a mistura

$$\frac{\partial(\rho_m \mathbf{u}_m)}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho_m \mathbf{u}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{J}\right) = \rho_m \mathbf{g} - \nabla p_m + \nabla \bullet \tau_m + \frac{1}{\forall} \int_{S_i} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)\, \dot{m}\, dS_i$$

$$p_m = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \quad ; \quad \boldsymbol{\tau}_m = \alpha_1 \boldsymbol{\tau}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\tau}_2$$

J é o fluxo de deslizamento ("drift flux") generalizado

(desprezando termos de correlação cruzada e para fluidos incompressíveis)

$$\rho_m \mathbf{J} = \alpha_1 \alpha_2 \rho_1 \rho_2 \left(\hat{\mathbf{u}}_2 - \hat{\mathbf{u}}_1\right)\left(\hat{\mathbf{u}}_2 - \hat{\mathbf{u}}_1\right)$$

- Modelo para a velocidade de deslizamento $\left(\hat{\mathbf{u}}_2 - \hat{\mathbf{u}}_1\right)$ utiluza-se modelos empíricos (Ishii, 1975, Hibiki e Ishii, 2002 e 2003).

Modelo Homogêneo

- As duas fases escoam com a mesma velocidade: $J = 0$

- Conservação de massa da mistura

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho_m \, \mathbf{u}_m \right) = 0$$

- Conservação de quantidade de movimento da mistura

$$\frac{\partial (\rho_m \, \mathbf{u}_m)}{\partial t} + \nabla \bullet \left(\rho_m \, \mathbf{u}_m \, \mathbf{u}_m \right) = \rho_m \, \mathbf{g} - \nabla \, p_m + \nabla \bullet \, \tau_m$$

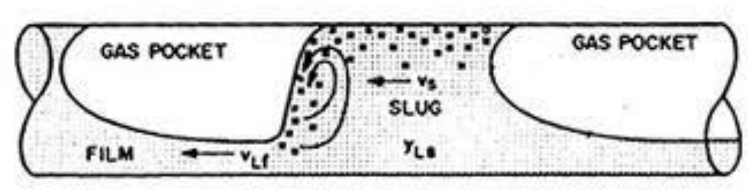
Comentários sobre as Equações Reduzidas

- Os modelos baseados na equações reduzidas, são baseados nas equações médias temporais
- Necessitam de equações de fechamento para avaliar as iterações existentes nas interfaces

Modelo de Dois Fluidos 1D

Modelo de Dois Fluidos 1D

- O Modelo de Dois Fluidos 1D é extremamente usado na simulação de escoamentos bifásicos em dutos
  - Ex. Indústria do petróleo, nuclear, etc
- Natureza complexa (3D) do escoamento (ex. regime de golfadas)
  - Apesar disso, estratégia 1D ainda é a mais adequada para a simulação de longos dutos



- No entanto, é preciso ter extremo cuidado
  - O processo de média leva a perda de informação
  - Modelos de fechamento devem ser incorporados
  - Efeito crítico sobre o caráter matemático das equações (*bem- ou mal-posto*)

Modelos de Equações Reduzidas 1D

- Processo de obtenção do conjunto de equações que caracteriza o Modelo de Dois Fluidos 1D

Navier-Stokes

- Formulação Local Instantânea para cada fase
- Equações constitutivas/Salto na Interface

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} F(t,\mathbf{x})\,dt$$

Média Temporal

Modelo de Dois Fluidos 3D

- Equações Médias para cada fase
- Equações constitutivas e fontes interfaciais

$$\langle F_k \rangle(\mathbf{x},t) = \frac{1}{A_t}\int_{A_t} F_k \; dA_t$$

Média Espacial (seção transversal)

Modelo de Dois Fluidos 1D

Modelo de Dois Fluidos 1D

- integrar as equações tri-dimensionais através da seção transversal
- introduzir valores médios apropriados.

$$\langle F_k \rangle(\mathbf{x},t) = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} F_k \, dA_t \qquad \langle\langle F_k \rangle\rangle(\mathbf{x},t) = \frac{\langle \alpha_k \, F_k \rangle}{\langle \alpha_k \rangle}$$

- Fração de vazio

$$\langle \alpha_k \rangle = \frac{\langle \forall_k \rangle}{\forall}$$

O componente axial da velocidade média na área ponderada da fase *k*

$$\langle\langle \hat{u}_k \rangle\rangle = \frac{\langle \alpha_k \, \hat{u}_k \rangle}{\langle \alpha_k \rangle} = \frac{\langle j_k \rangle}{\langle \alpha_k \rangle}$$

fluxo volumétrico da fase *k* ou velocidade superficial.

$$\langle j_k \rangle = \langle \alpha_k \, \hat{u}_k \rangle \qquad \langle j \rangle = \sum_{k=1}^{2} \langle j_k \rangle = \sum_{k=1}^{2} \langle \alpha_k \, \hat{u}_k \rangle$$

Conservação de Massa 1D

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\left\{\frac{\partial(\alpha_k\ \overline{\rho}_k)}{\partial t}+\nabla\bullet(\alpha_k\ \overline{\rho}_k\ \hat{\mathbf{u}}_k)\right\}dA_t=\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\Gamma_k\ dA_t$$

- Escoamento 1D na direção x:

$$\hat{u}_{ky} \ll \hat{u}_{kx} \qquad \hat{u}_{kz} \ll \hat{u}_{kx} \qquad \frac{\partial}{\partial z} \sim 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle\alpha_k\rangle\,\bar{\rho}_k)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\langle\alpha_k\rangle\,\bar{\rho}_k\langle\langle\hat{u}_{kx}\rangle\rangle\right)=\langle\Gamma_k\rangle$$

- Equações de fechamento: $\langle\Gamma_k\rangle$

Conservação de Quantidade de Movimento Linear 1D

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\left\{\frac{\partial\,\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k}{\partial t}+\nabla\bullet(\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k\,\hat{\mathbf{u}}_k)\right\}dA_t=$$

$$=\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\left\{\alpha_k\nabla\,\overline{p}_k+\nabla\bullet\left[\alpha_k\left(\overline{\boldsymbol{\tau}}_k+\overline{\boldsymbol{\tau}'_k}\right)\right]\right\}dA_t+\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\alpha_k\,\overline{\rho}_k\,\mathbf{g}_k\,dA_t$$

$$+\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\left\{(\mathbf{u}_{ki}-\hat{\mathbf{u}}_k)\Gamma_k+(p_{ki}-\overline{p}_k)\nabla\,\alpha_k-\nabla\,\alpha_k\bullet\tau_{ki}+\mathbf{M}_{ki}\right\}dA_t$$

- Escoamento 1D na direção x:

$$\hat{u}_{ky}\ll\hat{u}_{kx}\qquad\qquad \hat{u}_{kz}\ll\hat{u}_{kx}\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial z}\sim 0$$

Conservação de Quantidade de Movimento Linear 1D

- Termo convectivo $$\frac{1}{A_t}\int_{A_t} \nabla \bullet (\alpha_k\ \overline{\rho}_k\ \widehat{\mathbf{u}}_k\ \widehat{u}_k)\, dA_t \approx \frac{1}{A_t}\int_{A_t} \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k\ \overline{\rho}_k\ \widehat{u}_k\ \widehat{u}_k)\, dA_t$$

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t} \nabla \bullet (\alpha_k\ \overline{\rho}_k\ \widehat{\mathbf{u}}_k\ \widehat{u}_k)\, dA_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\rho}_k \langle \alpha_k \rangle \langle\langle \widehat{u}_k\ \widehat{u}_k \rangle\rangle\right)$$

- Parâmetro de distribuição $$C_{u,k} = \frac{\langle\langle u_k^2 \rangle\rangle}{\langle\langle u_k \rangle\rangle^2}$$

$$C_{u,k} = \frac{\langle\langle u_k^2 \rangle\rangle}{\langle\langle u_k \rangle\rangle^2} = \frac{\langle \alpha_k u_k^2 \rangle}{\langle \alpha_k \rangle \langle\langle u_k \rangle\rangle^2} = \frac{\langle \alpha_k u_k^2 \rangle \langle \alpha_k \rangle^2}{\langle \alpha_k \rangle \langle u_k \rangle^2} = \frac{\int \alpha_k u_k^2 dA \int \alpha_k dA}{\left(\int \alpha_k u_k dA\right)^2}$$

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t} \nabla \bullet (\alpha_k\ \overline{\rho}_k\ \widehat{\mathbf{u}}_k\ \widehat{u}_k)\, dA_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(C_{u,k} \langle \alpha_k \rangle\, \overline{\rho}_k \langle\langle \widehat{u}_k \rangle\rangle \langle\langle \widehat{u}_k \rangle\rangle\right)$$

Conservação de Quantidade de Movimento Linear 1D

- Fluxo líquido viscoso na direção x

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\nabla\bullet\left[\alpha_k\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_k+\overline{\boldsymbol{\tau}'_k}\right)\right]dA_t=$$

$$=\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha_k\left(\bar{\tau}_{k_{xx}}+\overline{\tau'_{k_{xx}}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha_k\left(\bar{\tau}_{k_{xy}}+\overline{\tau'_{k_{xy}}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\alpha_k\left(\bar{\tau}_{k_{xz}}+\overline{\boldsymbol{\tau}'_{k_{xz}}}\right)\right]\right\}dA_t$$

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\nabla\bullet\left[\alpha_k\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_k+\overline{\boldsymbol{\tau}'_k}\right)\right]dA_t=-\frac{\tau_{wk}\,S_k}{A_t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\left\langle\alpha_k\right\rangle\left\langle\left\langle\bar{\tau}_{k_{xx}}+\overline{\tau'_{k_{xx}}}\right\rangle\right\rangle\right]$$

  - τ_{wk} tensão cisalhante que atua na parede do duto

Conservação de Quantidade de Movimento Linear 1D

- Termo interfacial

$$\frac{1}{A_t}\int_{A_t}\left\{(\mathbf{u}_{ki}-\hat{\mathbf{u}}_k)\Gamma_k+\mathbf{M}_{ik}-\nabla\alpha_k\bullet\tau_{ki}+(p_{ki}-\bar{p}_k)\nabla\alpha_k\right\}dA_t=$$

$$=(\langle\langle\mathbf{u}_{ki}\rangle\rangle-\langle\langle\hat{\mathbf{u}}_k\rangle\rangle)\langle\Gamma_k\rangle+\left\langle\mathbf{M}_k^d\right\rangle+(\langle\langle p_{ki}\rangle\rangle-\langle\langle\bar{p}_k\rangle\rangle)\frac{\partial\langle\langle\alpha_k\rangle\rangle}{\partial x}$$

força cisalhante interfacial total: $\left\langle\mathbf{M}_k^d\right\rangle=\langle\mathbf{M}_{ik}\rangle_x-\langle\nabla\alpha_k\bullet\boldsymbol{\tau}_{ki}\rangle_x$

$$\left\langle\mathbf{M}_k^d\right\rangle=-\frac{\tau_i\,S_i}{A_t}$$

- τ_i Tensão cisalhante na interface

Conservação de Quantidade de Movimento Linear 1D

$$\frac{\partial \langle \alpha_k \rangle \bar{\rho}_k \langle\langle \hat{u}_k \rangle\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(C_{u,k} \langle \alpha_k \rangle \bar{\rho}_k \langle\langle \hat{u}_k \rangle\rangle \langle\langle \hat{u}_k \rangle\rangle \right) =$$

$$= -\langle \alpha_k \rangle \frac{\partial}{\partial x} \langle\langle \bar{p}_k \rangle\rangle - \frac{\tau_{wk}\, S_k}{A_t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\langle \alpha_k \rangle \langle\langle \bar{\tau}_{k_{xx}} + \overline{\tau'_{k_{xx}}} \rangle\rangle \right]$$

$$+ \langle \alpha_k \rangle \bar{\rho}_k\, g_x + \langle\langle \hat{u}_{ki} - \hat{u}_k \rangle\rangle \langle \Gamma_k \rangle \pm \frac{\tau_i\, S_i}{A_t} + \frac{\partial \langle\langle \alpha_k \rangle\rangle}{\partial x}\left(\langle\langle p_{ki} \rangle\rangle - \langle\langle p_k \rangle\rangle \right)$$

- Equações de fechamento: $C_{u,k}$; τ_{wk} ; τ_i

  $p_{ki} - p_k$; $p_{gi} - p_{li}$

Equações de Conservação 1D

- Conservação de energia

$$\frac{\partial \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho}_k \langle\langle \hat{h}_k \rangle\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(C_{h,k} \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho}_k \langle\langle \hat{u}_k \rangle\rangle \langle\langle \hat{h}_k \rangle\rangle \right) =$$

$$= \frac{q_{wk}\, S_k}{A_t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\langle \alpha_k \rangle \langle\langle q_{k_x} + \overline{q'_{k_x}} \rangle\rangle \right] + \langle\langle h_{ki} \rangle\rangle \langle \Gamma_k \rangle + \langle\langle q_{ki} \rangle\rangle$$

  - Sem transferência de massa e sem difusão axial
  - Eliminando as barras para simplificar

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \alpha_k\, h_k) + \frac{\partial}{\partial x}(C_{h,k}\, \rho_k \alpha_k u_k h_k) = \frac{q_{wk} S_k}{A} \pm \frac{q_i S_i}{A}}$$

- Equações de fechamento: $C_{u,h}$; q_{wk} ; q_i

Modelo 2 Fluidos Isotérmico 1D

- Hipóteses:
  - Sem transferência de massa, isotérmico, sem difusão axial
- Eliminando as barras para simplificar $u_k = \langle\langle \hat{u}_{kx} \rangle\rangle$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \alpha_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_k \alpha_k\, u_k) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k \alpha_k\, u_k) + \frac{\partial}{\partial x}\left(C_{u,k}\, \rho_k \alpha_k\, u_k^2\right) =$$

$$= -\alpha_k \frac{\partial\, p_{ki}}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_k\,(p_{ik} - p_k)}{\partial x} - \alpha_k \rho_k g_x - \frac{\tau_{wk} S_k}{A} \pm \frac{\tau_i S_i}{A}$$

Modelo Homogêneo Isotérmico 1D

- Hipóteses:
  - Bifásico, sem transferência de massa, isotérmico, sem difusão axial

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m u_m)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial (\rho_m u_m)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m u_m u_m)}{\partial z} = -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \rho_m g \,\mathbf{sen}\beta - \frac{\tau_w S_w}{A}$$

- Equações de fechamento: τ_w

Modelos 1-D de Deslizamento (Drift)

- Hipóteses:
  - Bifásico, sem transferência de massa, isotérmico, sem difusão axial
- Equação de conservação de massa

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_g)}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_\ell \rho_\ell u_\ell)}{\partial z} = 0$$

ou

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g u_m)}{\partial z} = -\frac{\partial(\alpha_g \rho_g V_{gm})}{\partial z} \qquad V_{gm} = u_g - u_m$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial z} = 0$$

Modelos 1-D de Deslizamento (Drift)

- Equação de conservação de quantidade de movimento

$$\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_m u_m u_m)}{\partial z} = -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \rho_m\, g\, \mathbf{sen}\beta - \frac{\tau_w S_w}{A} - \frac{\partial J}{\partial z}$$

$$J = \frac{\alpha_g \alpha_\ell\; \rho_g\; \rho_\ell \left(u_g - u_\ell\right)\left(u_g - u_\ell\right)}{\rho_m}$$

Fluxo de *drift*

- Equações de fechamento: τ_w ; $V_{gm} = (u_g - u_m)$; $u_r = (u_g - u_\ell)$

velocidade relativa entre fases

Modelos 1-D de Deslizamento (Drift)

- velocidade entre fases: $u_r = (u_g - u_\ell)$
- velocidade relativa entre a fase gasosa e o fluxo volumétrico $j = \alpha_g\, u_g + \alpha_\ell\, u_\ell$

$$V_{gj} = u_g - j \qquad \text{ou}$$

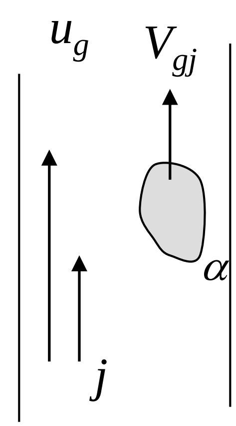
$$V_{gj} = \alpha_\ell (u_g - u_\ell) = \alpha_\ell\, u_r$$

- velocidade relativa entre a fase gasosa e velocidade média

$$V_{gm} = u_g - u_m$$

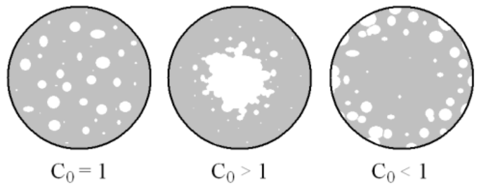
- Formulação de Zuber-Findlay (1965):

$$u_g = C_o\, j + V_{drift}$$



C_o : parâmetro de distribuição: considera o efeito de α_g e u_m nos perfis

V_{drif} : velocidade de deslizamento



$$\boxed{V_{gj} = V_{drift} + (C_o - 1)\, j}$$

$$\boxed{J = \frac{\alpha_g}{\alpha_\ell} \frac{\rho_g\, \rho_\ell}{\rho_m} V_{gj}^2}$$

$$\boxed{u_g = u_m + \frac{\rho_\ell}{\rho_m} V_{gj}}$$

$$\boxed{u_\ell = u_m - \frac{\alpha_g}{1-\alpha_g} \frac{\rho_g}{\rho_m} V_{gj}}$$

Análise das Características do Modelo de Dois Fluidos 1D

- Segundo Courant e Lax (1949) um modelo é considerado "bem-posto" ("Well-posed") se as ***condições de Hadamard*** são satisfeitas
  - A solução existe
  - A solução é única
  - A solução depende continuamente das condições iniciais e de contorno
- Para tal, a análise das características é realizada

Análise das Características do Modelo de Dois Fluidos 1D

- Linearização do sistema de equações

$$\mathbf{A}(\mathbf{v})\,\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{v})\,\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{v} + \mathbf{C}(\mathbf{v}) = 0 \qquad 0 \le x \le L \quad t \ge 0$$

$$\mathbf{v}(0,x) = \mathbf{v}_{ini}(x)$$

$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes *Jacobianas* de dimensão $n \times n$

$\mathbf{C}$ é um vetor coluna de dimensão n

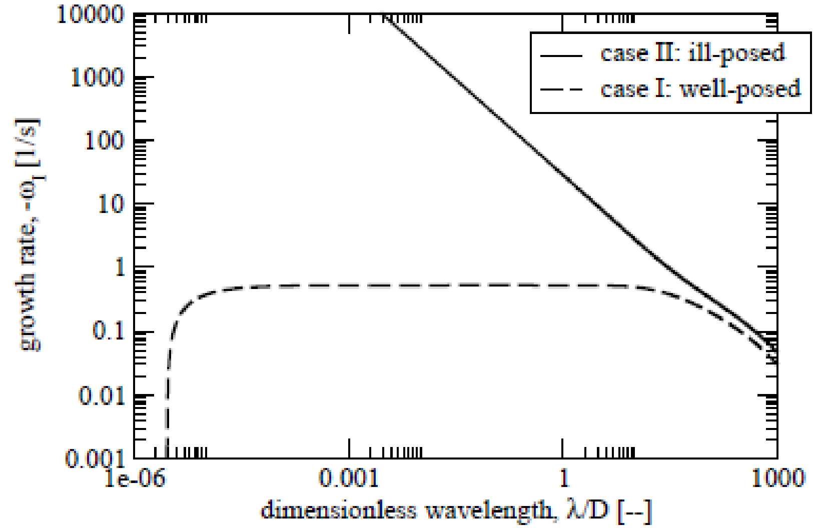
- *Características* λ_n do sistema, são definidas tais que

$$det\,(\mathbf{B} - \lambda_n \mathbf{A}) = 0$$

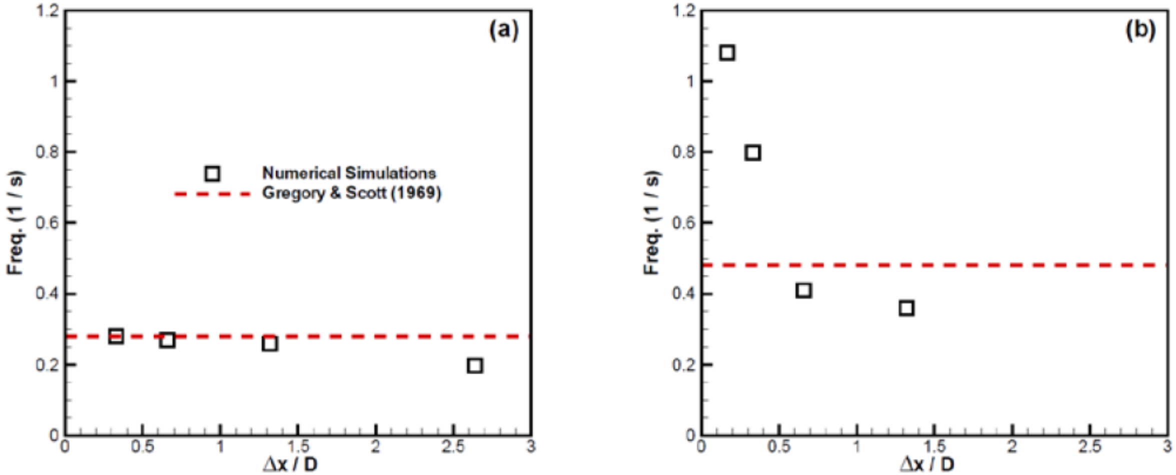
  - reais distintas: ***sistema hiperbólico***
  - nulas: ***sistema parabólico***
  - complexas: ***sistema elíptico*** → "Mal-posto"

Modelo "Bem-posto" vs. "Mal-posto"

- *Montini (2011)*
  - Taxa de crescimento das perturbações
  - Bem-posto vs. Mal posto

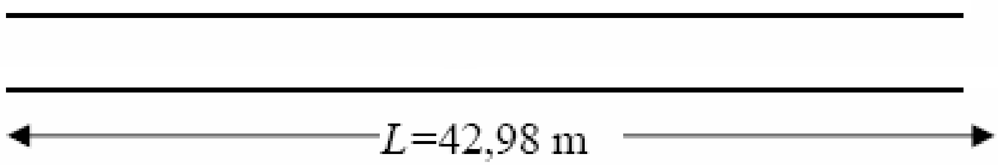


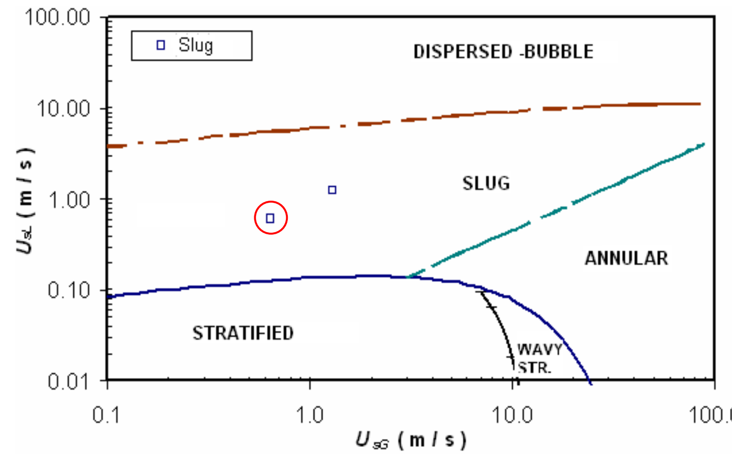
- *Carneiro (2006)*
  - Transição escoamento estratificado -> golfadas
  - Frequência das golfadas para casos bem e mal-postos

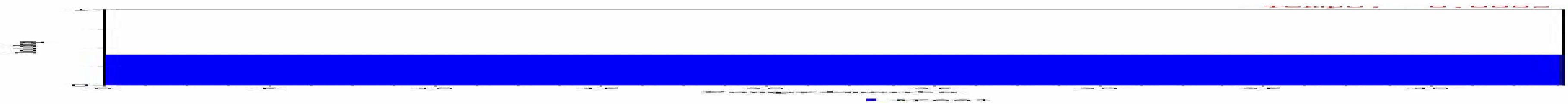


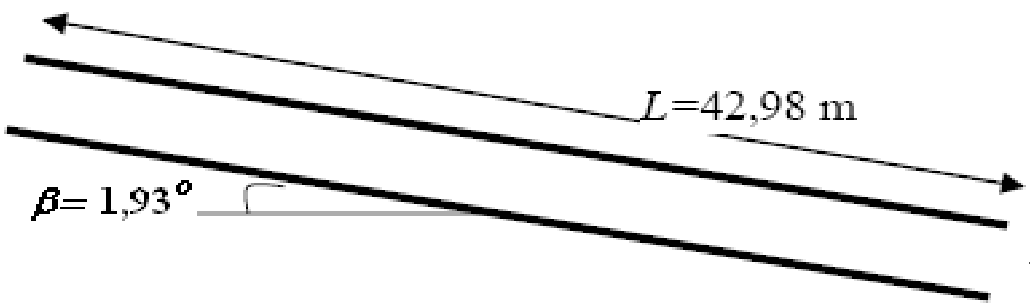
(a) caso bem-posto (b) caso mal posto

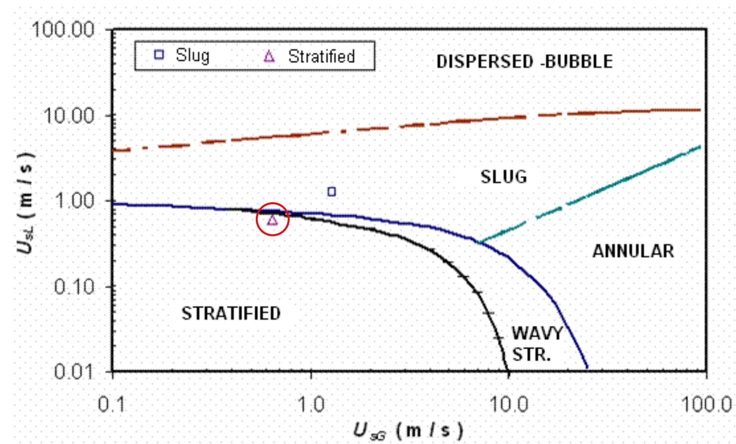
Escoamento Estável vs. Instável

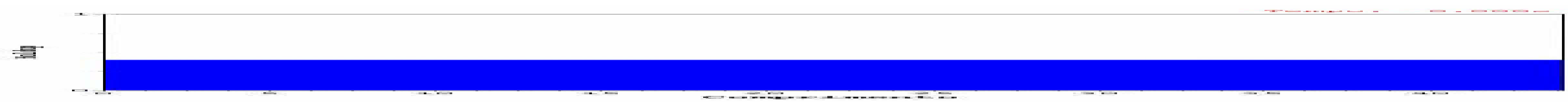






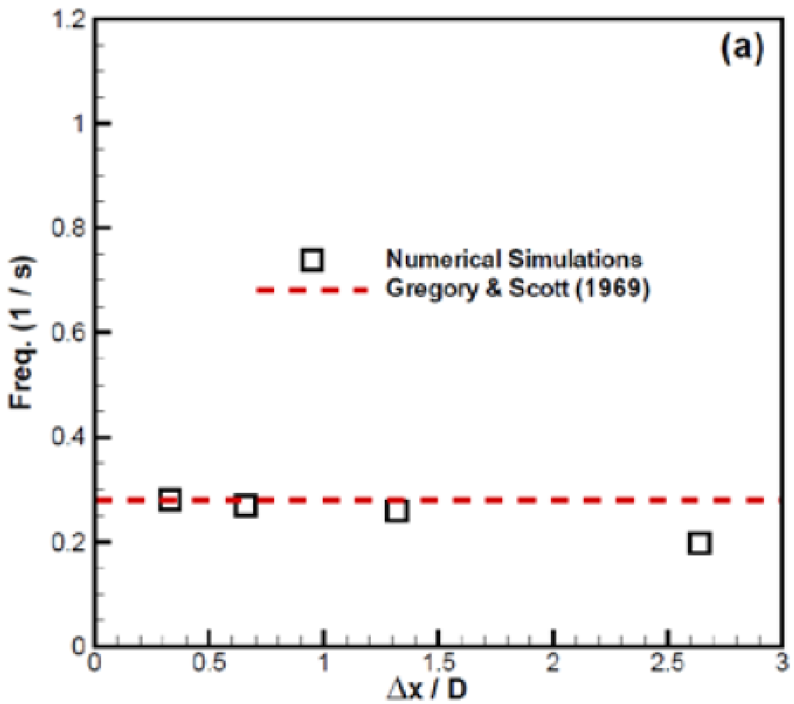




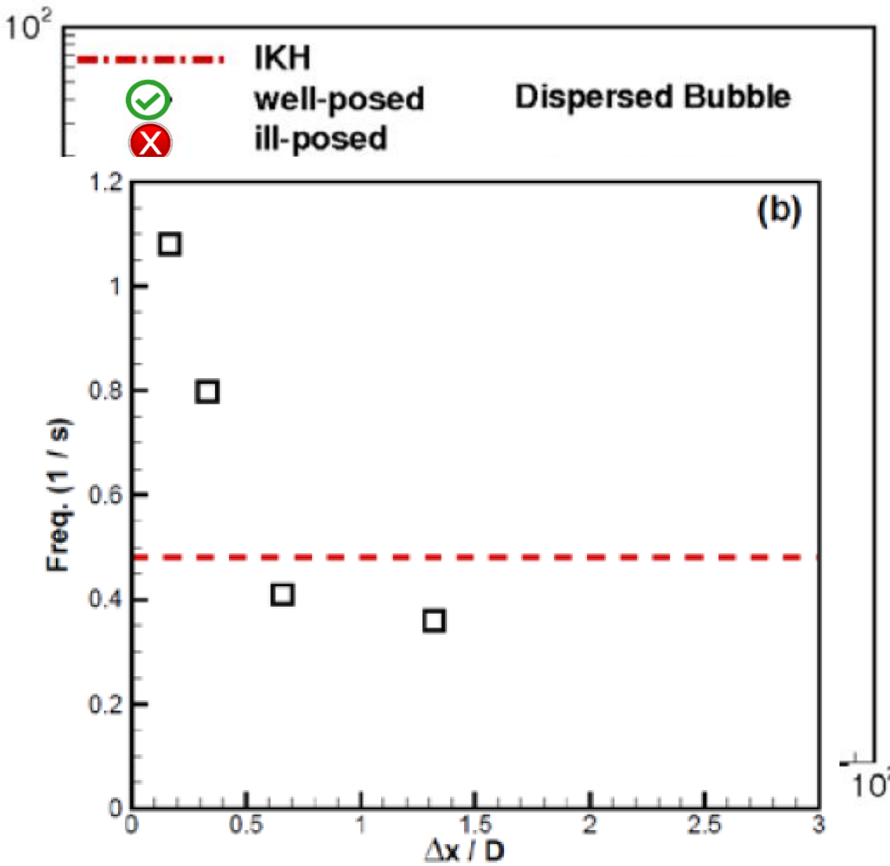


Estabilidade vs. Bom-Condicionamento

- Escoamento estratificado e golfadas
  - Região estável (bem posto)



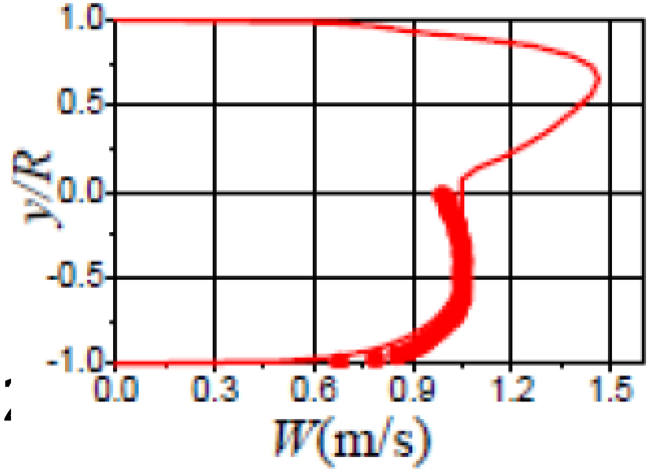
(a) caso bem-posto



(b) caso mal posto

Modelos de Fechamento

- **Parâmetro de Forma/Distribuição**
  - Geralmente considera-se $C_{u,k} = 1$
  - $C_{u,k}$ corrige o fato de que o perfil de velocidades não é uniforme (ex. Escoamento estratificado)
  - Altera o fluxo de quantidade de movimento
  - Escoamento monofásico:
    - Laminar: $C_{u,k}$=4/3=1,33
    - Turbulento (lei de 1/7): $C_{u,k}$=1,02



(Febres, 2010)

  - Escoamento multifásico:
    - $C_{u,k}$ geralmente empírico, pode depender de velocidades, geometria e frações volumétricas

Modelos de Fechamento

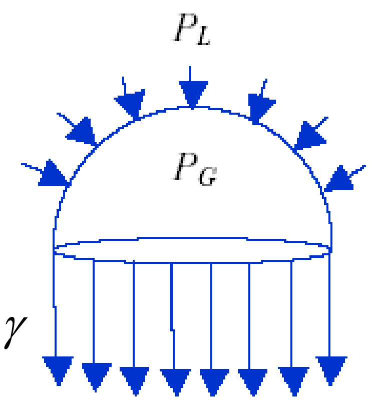
- **Tensão Cisalhante das fases com a parede e na interface**

$$\tau_{wk} = f_k \frac{1}{2} \bar{\rho}_k \langle \hat{u}_k \rangle \left| \langle \hat{u}_k \rangle \right| \qquad \tau_i = f_i \frac{1}{2} \bar{\rho}_i \langle \hat{u}_2 - \hat{u}_1 \rangle \left| \langle \hat{u}_2 - \hat{u}_1 \rangle \right|$$

f_k: fator de atrito, determinado empiricamente em função do número de Reynolds da fase *k*

- **Difusão axial** frequentemente desprezada

- **Salto de pressão** na interface:
  - Tensão superficial: γ $\quad (p_{ig} - p_{i\ell}) = \gamma\, \kappa$
  - Curvatura: κ



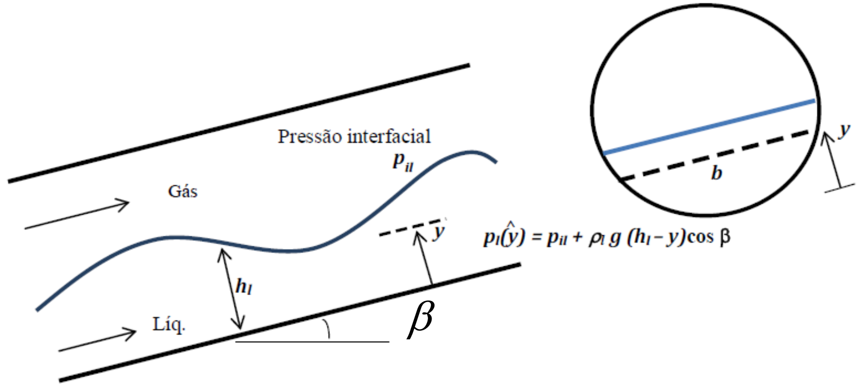
Modelos de Fechamento

- **Diferença entre a pressão média em cada fase e pressão interfacial**

  - É possível demonstrar que, se a pressão média em cada fase for constante e igual a pressão interfacial, o modelo é mal-posto sob qualquer condição (exceto $u_l = u_g$)

  - Escoamento <u>horizontal ou levemente inclinado</u>: Banerjee e Chan (1980) propuseram a consideração de uma distribuição hidrostática de pressão

$$\frac{\partial \alpha_k (p_k - p_{kl})}{\partial x} = \alpha_k \rho_k g \cos\beta \frac{\partial h_l}{\partial x}$$



Modelos de Fechamento

- **Diferença entre a pressão média em cada fase e pressão interfacial**
  - Escoamento vertical: $\frac{\partial \alpha_k (p_k - p_{kl})}{\partial x}$

Reference	Formulation
Model 1 (Fowler and Lisseter, 1992)	$\Delta P_{Li} = W_f \, \rho_L (U_L - U_{wave})^2$ $U_{wave} = X \, U_L$, X=const.
Model 2 (Gonzalez, Nieckele and Carneiro, 2016) (Berna et al., 2014)	$\Delta P_{Li} = W_f \, \rho_L (U_L - U_{wave})^2$ $U_{wave} = U_{wave}(U_{sL}, U_{sG}, \rho_L, \rho_G, \mu_L, \mu_G, \sigma)$
Model 3 (Bestion, 1990)	$\Delta P_{Gi} = \Delta P_{Li} = 1.2 \, \rho_m (U_L - U_G)^2$

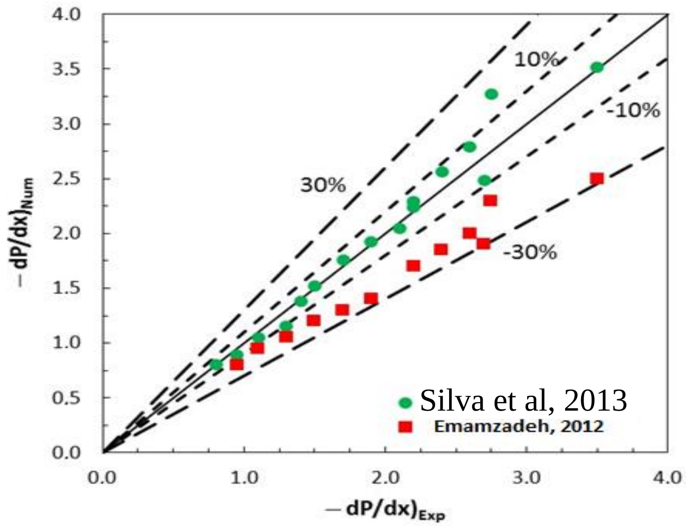
Outros métodos de regularização

- Massa virtual
- Difusão Artificial
  - Equação de Quantidade de Movimento
  - Equação da Conservação de Massa

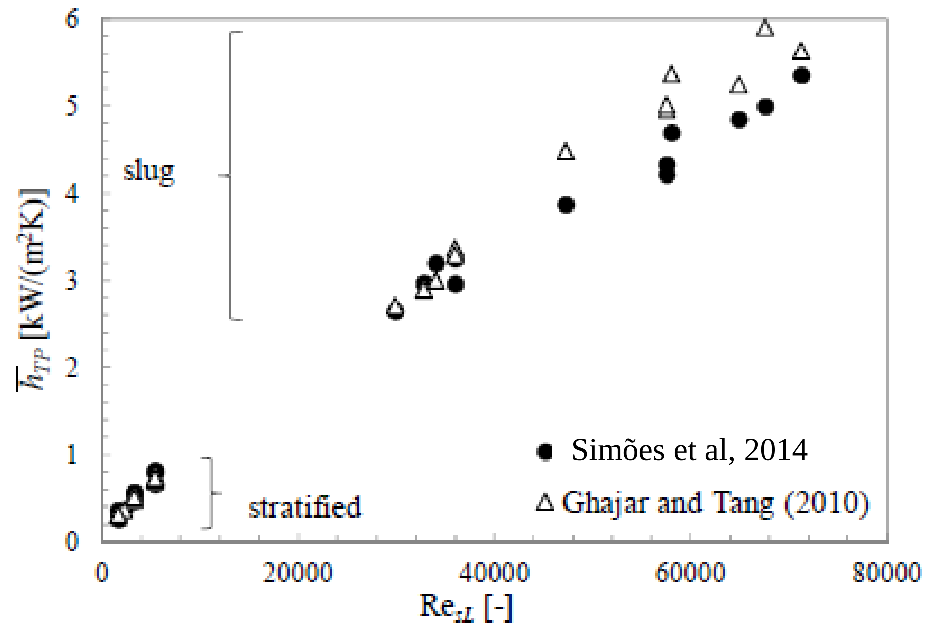
Escoamento em Horizontal

Água + ar

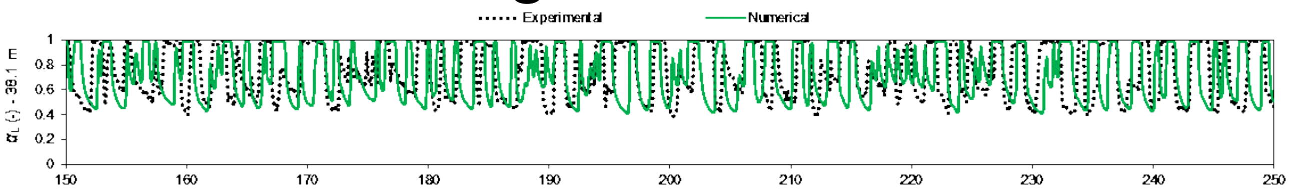
Anular



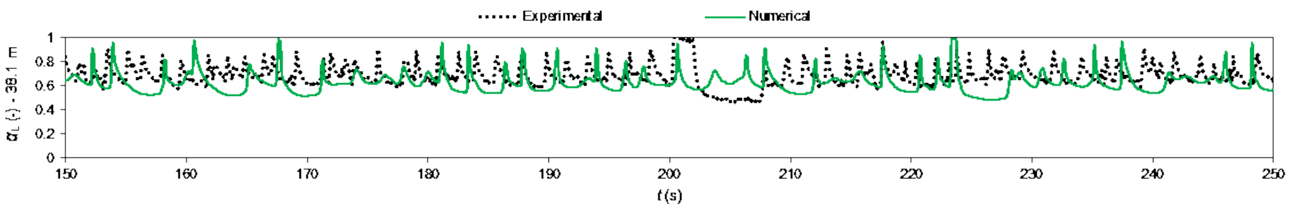
Estratificado e Golfada com troca térmica



Óleo viscoso + gás denso



Golfada



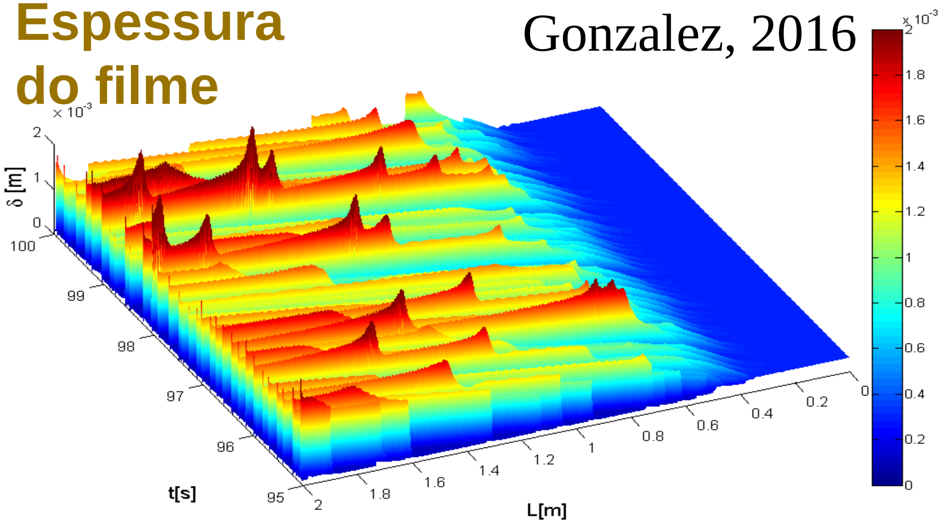
Ondulado

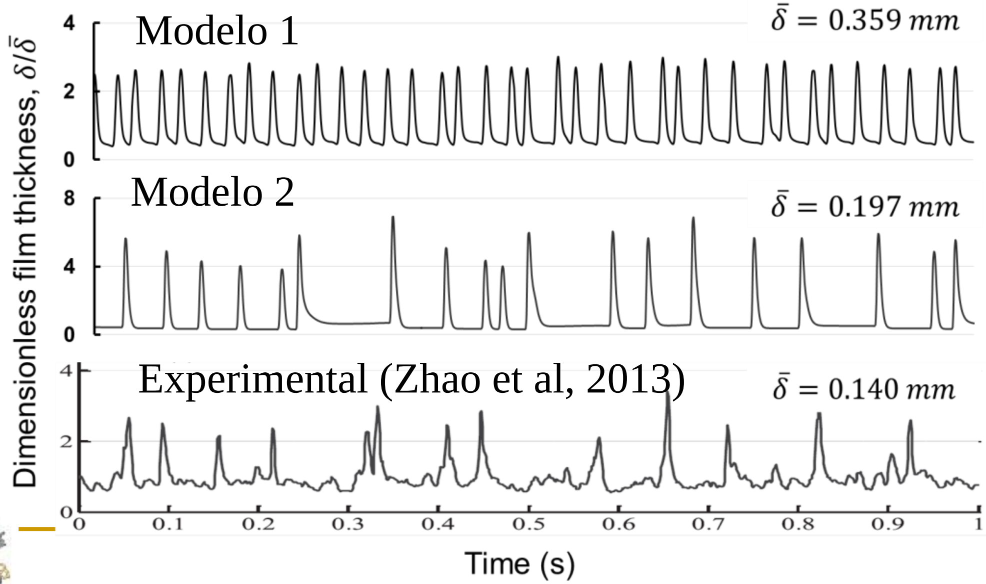
Escoamento Vertical

Anular

Espessura do filme

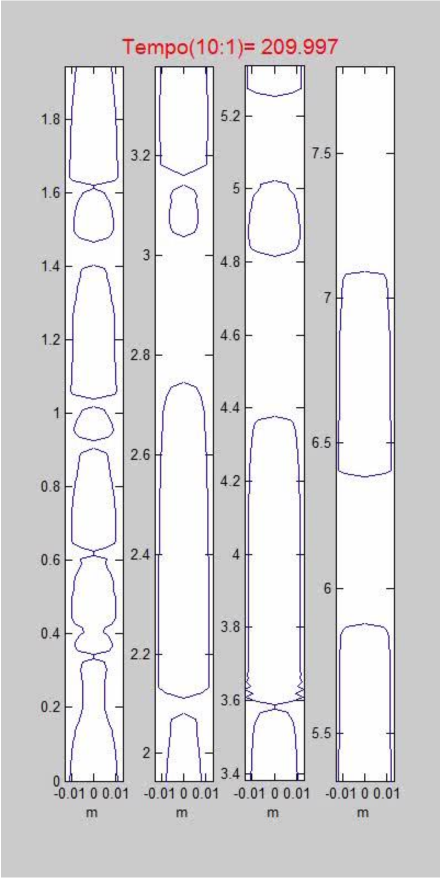
Gonzalez, 2016





Água + ar

Golfada



Inácio, 2012

Comentários Finais

- Diferentes tipos de modelos podem ser utilizados dependendo do tipo de aplicação

- Modelos de “um fluido”:
  - Apresentam uma demanda computacional maior
  - Envolvem um grau menor de hipóteses simplificadoras
  - É necessário determinar com precisão da posição da interface, raio de curvatura para obtenção de solução de qualidade

Comentários Finais

- Modelos baseados na equações médias:
  - são mais simples e de solução mais rápida.
  - Possuem diferentes graus de aproximação e necessitam de equações de fechamento para avaliar as iterações existentes nas interfaces
  - Fechamento 1D possui profundo efeito no caráter matemático das equações do Modelo de Dois Fluidos 1D
    - Se manifesta, por exemplo, na impossibilidade de se obter uma solução independente da malha
    - É preciso ter extremo cuidado: softwares comerciais frequentemente "mascaram" os efeitos de um modelo mal-posto pois malhas grosseiras são utilizadas

Obrigado !

Agradecimentos:

João N.E. Carneiro (Sintef do Brasil)